182

ゲーム理論
(第8回 オークションの基礎 II)

九州大学大学院システム情報科学研究院
情報学部門
横尾 真
E-mail: yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp
http://agent.inf.kyushu-u.ac.jp/~yokoo/

183

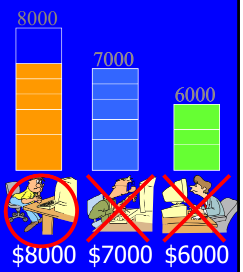
メカニズム：英国型

- メカニズム：入札者は自分の付け値を増やすことができる．だれも値の変更を望まなくなった時点で，最高値の入札者が落札
- 個人価値の場合の事後均衡となる戦略：自分の付け値が最高値で無い場合，現時点での最高値から少額だけ競り上げ続け，自分の評価値に達したら降りる
- 事後均衡（ex post equilibrium）：他者が（そのタイプに関わらず）均衡戦略を取る限り，自分も均衡戦略を取ることが最適（支配戦略均衡より弱く，ナッシュ均衡より強い）

184

メカニズム: 英国型

- 事後均衡では，最も高い評価値を持つ人が，二番目に高い評価値+少額で落札
- 結果はパレート効率的



185

メカニズム：Vickrey
(第二価格秘密) 入札

- メカニズム：各入札者は他者の付け値を知らされずに入札する．最も高い付け値をつけた入札者が，二番目に高い付け値で落札
- 支配戦略 (個人価値の場合)：自分の評価値を入札するのが支配戦略 (正直が最良の策／誘因両立性)
- 結果はパレート効率的
- 英国型と得られる結果は同様

186

メカニズム：第一価格秘密入札

- メカニズム：各入札者は他者の付け値を知らされずに入札する．最も高い付け値をつけた入札者がその付け値で落札
- 支配戦略：一般には存在しない

187

準備：確率変数の基礎

- 確率変数 t：確率的に値を取る変数
- 例えば，3回コインを投げて，表がでる回数を表す確率変数 t を考える
- t=0の確率は1/8, t=1の確率は3/8, t=2の確率は3/8, t=3の確率は1/8
  - すべての可能性を足すと1
  - t の期待値は 0*1/8+1*3/8+2*3/8+3*1/8=12/8=1.5
  - t^2 の期待値は 0*1/8+1*3/8+4*3/8+9*1/8=24/8=3
- t が連続的な値を取る場合 (例えば0から1までの実数値)，t の取り得る値は無限個
- よって，t がある一点を取る確率 (t=0.5等) は無限に小さい
- 一方，t がある範囲にある確率 (例えばtが0.1から0.5まで) は求められる

188

確率変数の基礎

- 連続的な値を取る場合，t がx以下である確率を，累積分布関数 F(t≦x)で表す
  - t が[0, 1]の一様分布なら， F(t≦x)=x
- 累積分布関数を一階微分したのが確率密度関数 f(x)
  - t が[0, 1]の一様分布なら， f(x)=1
- 確率密度関数を，ある範囲で積分すれば，確率変数がその範囲の値を取る確率が得られる
  - t が[0, 1]の一様分布，tが0.1から0.5の間である確率：

$$\int_{0.1}^{0.5} f(x)dx = \int_{0.1}^{0.5} 1dx = [x]_{0.1}^{0.5} = 0.5-0.1=0.4$$

- t の最小値を0，最大値をt_{max}として，y=g(x)で与えられるyの期待値：

$$\int_0^{t\max} g(x)\cdot f(x)dx$$

- t が[0, 1]の一様分布，t^2の期待値

$$\int_0^1 x^2\cdot 1dx = [x^3/3]=1/3$$

189

演習：ベイジアンナッシュ均衡（第一価格秘密入札）

- 2人の入札者，リスク中立，評価値は0から100の間の一様分布
- ベイジアンナッシュ均衡は？
- とりあえず，相手の入札yが [0, y_{max}] の一様分布だと仮定して，最適反応を求める
- yの分布関数はy/ $y_{max,}$ 密度関数は1/ y_{max}
- 相手の入札額をyとして，自分の評価値をx，入札額をx′とする
- 明らかにx′>y_{max}とするのは無意味，x′≦ y_{max}を仮定
- 期待効用をx′, x, y_{max} の式で表して，これを最大化するx′を求める

190

ベイジアンナッシュ均衡

- y<x′なら自分の勝ちで，効用はx-x′
- yの分布関数は y/y_{max}
- 勝つ確率：yがx′以下の確率=x′/y_{max}
- 期待効用は (x-x′) x′/ y_{max}
  - x′=x/2のとき最大で x^2 / 4 y_{max}
- 評価値の半分を入札するのが最適反応
- 互いに評価値の半分を入札するのがベイジアンナッシュ均衡となる

191

メカニズム：オランダ型

- メカニズム：主催者は非常に高い付け値からスタートして，ある買手がストップというまで付け値を下げていく．ストップといった入札者がその時点での付け値で落札．
- 支配戦略：一般には存在しない．

192

メカニズム：オランダ型

- 戦略的に第一価格秘密入札と同値
  - 二つのメカニズムに関して，必ず同じ結果をもたらす戦略が存在
- ゲームとして見た場合，この二つのメカニズムには本質的な違いがない
- オランダ型ではメカニズムの実行中に得られる情報があるのに，情報なしの第一価格秘密入札と同値なのはなぜか？
- オランダ型では実行可能だが，第一価格秘密入札では実現できない戦略が考えられるか？

193

メカニズム：オランダ型

- メカニズムの実行中に得られる情報は使いようがない
- 具体例：
  - オランダの花の市場
  - オンタリオのたばこオークション
  - バーゲンセール

6900

STOP!

$8000 $7000 $6000

194

メカニズムの性質 (個人価値の場合)

- オランダ型＝第一価格秘密入札
- 英国型＝Vickrey入札
- いくつかの仮定の元で，売手の収入の期待値は4つとも同じとなる（収入同値定理, Vickrey 1961）.
  - ベイジアンナッシュ均衡が存在すれば，均衡での収入の期待値が等しい.

195

演習：収入同値定理

- プレイヤは二人
- それぞれの評価値は[0, 1]の一様分布
- 第一価格秘密入札では，評価値の半分を入札するのがベイジアンナッシュ均衡
- 第二価格秘密入札では，真の評価値を入札するのが支配戦略均衡
- それぞれの場合の，主催者の収入の期待値は?
- 収入の期待値を計算するのはちょっと面倒，代わりにプレイヤの期待効用を求める
  - 社会的余剰=プレイヤ (入札者) の効用の和+主催者の効用
- それぞれの場合で，評価値xのプレイヤの期待効用を求めよう

196

演習：収入同値定理

考え方：第一価格秘密入札，第二価格秘密入札のそれぞれにおいて

- 自分の評価値は x
- 相手の入札を y とする
- yの確率密度関数 f(y)を求める
- 相手の入札が y で，自分が勝った場合の効用に f(y) をかけて，自分が勝つ範囲の y に関して積分する

197

第一価格秘密入札

- 評価値xのプレイヤはx/2を入札
- 相手の入札額 y は[0, 1/2]の一様分布，f(y)=2
- 勝った場合の効用はx/2
- 勝つのは相手の入札額がx/2未満の場合
- 期待効用： $\int_0^{x/2} x/2 \cdot 2dy = [xy]_0^{x/2} = x^2/2$
- xは[0, 1]の一様分布，期待効用は平均的には1/6

198

第二価格秘密入札

- 相手の入札が y の場合，y≦xの場合に勝って，効用は x-y
- yは0から1の一様分布，f(y)=1
- 期待効用:

$$\int_0^x (x-y)dy = [xy - y^2/2]_0^x = x^2/2$$

199

収入の期待値を直接求める

- 第一価格秘密入札の場合：
  - 均衡では互いに評価値の半分を入札する
  - 入札値は [0, 1/2] の一様分布
  - 主催者の収入=落札値は大きい方の入札値
- 第二価格秘密入札の場合：
  - 均衡では互いに真の評価値を入札
  - 入札値は [0, 1] の一様分布
  - 主催者の収入=落札値は小さい方の入札値

200

第一価格秘密入札

- [0, 1/2] の一様分布を取る二つの確率変数 t1, t2の，最大値を表す確率変数 t を考える
- t1, t2の累積分布関数は 2x
- tがx以下=t1がx以下 and t2がx以下
- tの累積分布関数は，2x･2x=4x^2
- tの確率密度関数は 8x
- tの期待値：$\int_0^{1/2} x\cdot 8x dx = [8x^3/3]_0^{1/2} = 1/3$

201

第二価格秘密入札

- [0, 1] の一様分布を取る二つの確率変数 t1, t2の，最小値を表す確率変数 t を考える
- t1, t2の累積分布関数は x
- tがx以下 ＝ t1がx以下　or t2がx以下
 ＝ 1 − (t1>x and t2 >x)
- tの累積分布関数は，1-(1-x)^2 =2x-x^2
- tの確率密度関数は 2-2x
- tの期待値：
$\int_0^{1} x\cdot(2-2x) dx = [x^2 - 2x^3/3]_0^{1} = 1/3$

202

社会的余剰の分配

- パレート効率的な割当てを行った場合，社会的余剰 (大きいほうの評価値) の平均は2/3
- 平均で主催者が1/3 (社会的余剰の半分)を得る
- 各プレイヤは1/6ずつ (社会的余剰の1/4) を得る

203

Vickrey入札の問題点

これまでの話では，Vickrey入札は良い点ばかり
 −支配戦略がある（正直が最良の策）
 −パレート効率性
 −英国型より早い
 −収入同値定理
なぜ使われないか?
- 分かり難い.
- 自分の評価値が分からない.
- 売手が信用できない.
- 評価値＝原価を知られたくない.

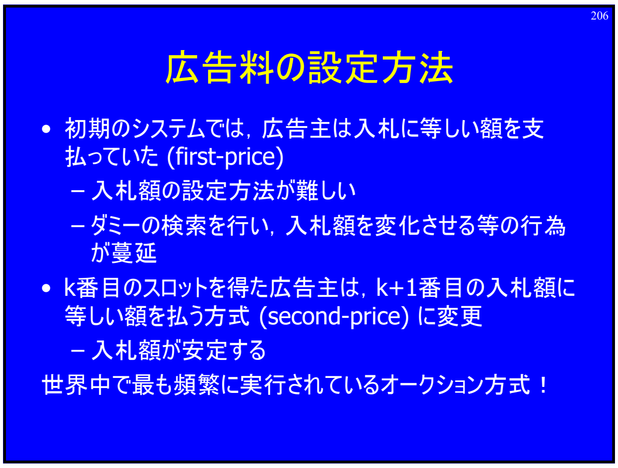
204

サーチエンジンでの広告

205

キーワード広告

- 広告主はキーワードに対して入札額を設定
- キーワードが検索されると，入札額の高い順に広告がユーザに提示される
- ターゲットを絞った広告が可能
- ユーザが広告のリンクをクリックした場合にのみ，広告主はサーチエンジンに広告料を支払う（pay-per-click）
- 広告料をどう設定するか?


206
広告料の設定方法
• 初期のシステムでは，広告主は入札に等しい額を支払っていた (first-price)
– 入札額の設定方法が難しい
– ダミーの検索を行い，入札額を変化させる等の行為が蔓延
• k番目のスロットを得た広告主は，k+1番目の入札額に等しい額を払う方式 (second-price) に変更
– 入札額が安定する
世界中で最も頻繁に実行されているオークション方式！