ゲーム理論
(第6回 オークションの基礎 I)

九州大学大学院システム情報科学研究院
情報学部門
横尾 真
E-mail: yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp
http://agent.inf.kyushu-u.ac.jp/~yokoo/

不完備情報ゲーム

- 様々な情報の不確実性が存在
  - 結果が確率的 (自然の選択)
  - 交互にプレイするゲームで，相手の手が観察できない
  - …
  - 他者の効用 (タイプ) が分からない

弱虫 (chicken) game

- 二人が車を崖に向けて走らせる
- 先にブレーキを踏んだほうが負け
- D: 絶対自分が先にブレーキを踏まない
- C: 適当なところでブレーキを踏む

I \ II	D	C
D	1, 1	4, 2
C	2, 4	3, 3

弱虫ゲームの変形

- 違うタイプのプレイヤが存在
  - Bull: 負けるのは死ぬのと同じくらい嫌
  - Chicken: ブレーキを踏まないのは死ぬほど怖い

Bull

	D	C
D	2, 1	4, 2
C	2, 4	3, 3

Chicken

	D	C
D	1, 1	3, 2
C	2, 4	3, 3

ベイジアンナッシュ均衡

- 相手のタイプが通常/bull/chickenの確率は1/3とする
- この確率分布は共通の知識
- 以下のタイプと戦略の組合せは，各タイプがこの通りの戦略を取ると仮定すると最適反応になっている：
  - 通常のプレイヤは D/C を 0.5で選ぶ
  - bullはDを選ぶ
  - chickenはCを選ぶ
- このようなタイプと戦略の組合せをベイジアンナッシュ均衡と呼ぶ
- 注意：タイプの確率分布が共通知識である必要がある

シグナリング

- 大学教育によって，労働者の生産性が向上しているとは思えないのに，大学教育を受ける人がいて，かつ，企業が大学教育を受けた人を高給で雇用するのはなぜか?
- 一つの解答： 大学教育が，能力の高い労働者と，低い労働者を区別するシグナルとして機能している

問題設定

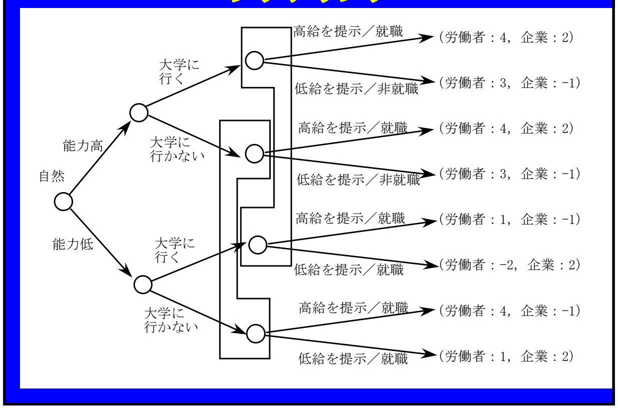
- 労働者：
  - 能力の高い人 (High) と低い人 (Low) がいて，確率は1/2
  - Highの生産性は6, Lowの生産性は3
  - 大学教育を受けるコストは，Highは0, Lowは3
- 企業：労働者に高賃金 (4) をオファーするか，低賃金 (1) をオファーするかを決める．企業の利得は生産性と賃金の差，雇用できないと企業の利得は-1
- Highは雇用されなくても自力で3の効用を得ることができるが，Lowは雇用されないと効用は0
- 労働者は大学教育を受けるか受けないかを選択する
- 企業は教育レベルに応じた (あるいは無視した) 賃金を設定する

どのようなベイジアンナッシュ均衡が存在するか?

注意点

- 労働者がHighかLowかは個人情報で，企業には観察できない
- 教育を受けても労働者の生産性が向上するわけではない

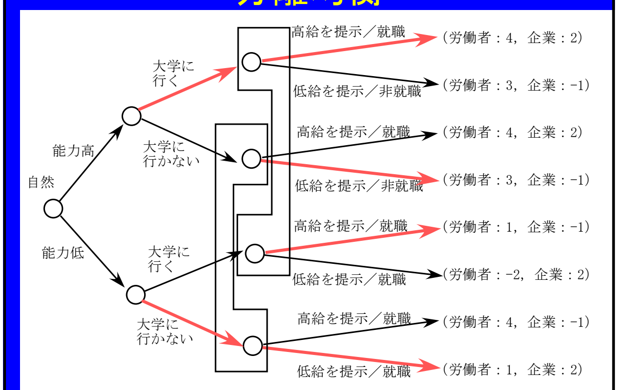
シグナリング



分離均衡

- 企業は大学教育を受けた労働者には高賃金 (4) を，受けなかった労働者には低賃金 (1) を支払う
- Highは大学教育を受ける
  - 効用は4
- Lowは大学教育を受けない
  - 効用は1
- 企業の効用は2
- Lowにとっては，大学教育を受けても効用は増えない
- 全員を低賃金で雇用すると，企業の利益は -1*0.5+(3-1)*0.5=0.5で低下．
- 労働者にとって，大学教育が自分の能力を示すシグナルとして機能している

分離均衡

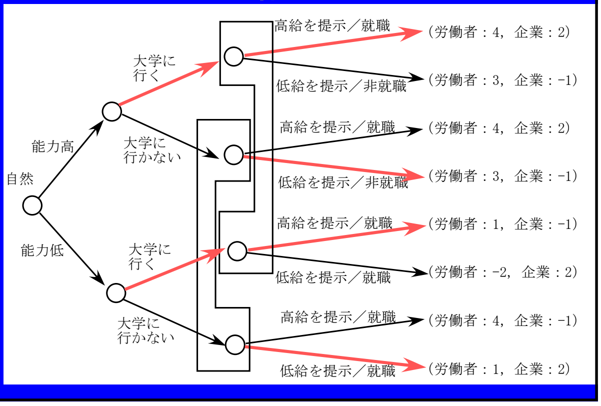


一括均衡

- 企業は大学教育を受けた労働者には高賃金 (4) を，受けなかった労働者には低賃金 (1) を支払う
- 全員が大学教育を受ける
- 企業の効用は 2*1/2+(3-4)*1/2=0.5
- 企業が全員を低賃金で雇うことにしても効用は増えない: -1*1/2+(3-1)*1/2=0.5
- Lowにとって大学教育をやめても効用は変わらない
- シグナリングが機能していない

一括均衡

165



シグナリングの他の事例

166

- 婚約指輪は月収の三か月分!
- 成人の儀式 (ライオンと戦う，崖から飛び降る)
- コマーシャル，豪華な店舗
- 純米酒 (醸造用アルコール不使用)，化学調味料不使用
- …

オークション

167

- 通常は相手のタイプは不明
  - いくらまで出せると思っているか?
- 自分の評価値に関しても不確実性が存在する場合がある

財の価値

168

個人価値／共通価値／相関価値

- 個人価値：物の価値は人によって異なり，その人の価値観によってのみ決定される．
  - 自分で使う骨董品
- 共通価値： 物の価値はすべての人で共通
  - 全員がこの共通価値を知っていればオークションを行なう必要はない．
  - 正しい値が不明で，買手が異なる推定値を持っている場合にオークションが必要
    - 鉱山の採掘権，ワールドカップの放映権
- 相関価値: これらの中間

参加者の性質

169

リスク中立型 ／ リスク回避型の入札者

- リスク中立型： 期待値のみを考慮
  - コインを投げて，表なら100円，裏なら0円のクジと，確実に50円もらえることの価値が同じと思う
- リスク回避型： 確実性を重視（少ない利益でも確実に勝つことを好む）
  - クジより確実に40円もらえる方が良いと思う

簡単化のための仮定

170

準線形 (quasi-linear) の効用

- 財を落札した場合の効用 (うれしさ)は，財の価値と支払額の差で与えられる．
  - 一万円の財を8000円で落札できれば効用は10000 − 8000 = 2000円
  - 財が落札できなかった場合の効用は0

171

セント・ペテルスブルグの逆説

- 以下のようなクジを考える.
  - コインを投げる.
  - 表が出たら終わり. 2円もらえる.
  - 裏が出たらならもう一回コインを投げる.
  - 表が出たら終わり, 4円もらえる.
  - 裏が出たならもう一回コインを投げる.
  - 表が出たら終わり, 8円もらえる.
  - 以下繰り返し, k回目に初めて表が出たら 2^k円もらえる
- このクジに参加するのに, いくらまでなら払っても良いか?

172

セント・ペテルスブルグのパラドックス

- なぜ期待値が無限大のクジに, 10円払うのもいやなのか?
  - リスクに対する態度:人間はリスクを避けたいと思う --- 期待値が小さくても, 確実な方を好む
    - 一億円確実にもらえるのと, コインを投げて表なら二億円, 裏なら0円のクジの価値は同じ?
  - 金額が倍になっても, うれしさは倍にならない:二万円は一万円の倍うれしいが, 二兆円は一兆円の倍ほどはうれしくない
  - このクジは現実には成立し得ない(地球全体の富の総額を超える賞金を約束している)

173

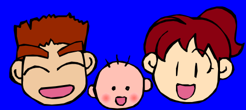
オークションメカニズムに望まれる性質

- 入札者にとって支配戦略(最適な戦略)があること
- メカニズムが不正行為に対して頑健であること
- 割当て結果がパレート効率的であること

174

パレート効率性 (通常の定義)

- いずれかの参加者の効用を犠牲にすることなしには, 他の参加者の効用を向上することができない状態

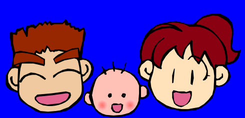


×	映画	2	2	2
	デパート	2	2	5
	公園	2	3	1
×	家にいる	1	1	1

175

社会的余剰 (Social Surplus)

- 効用が準線形の場合, パレート効率的な状態では, 参加者全員の効用の和 (社会的余剰) は最大化される.



×	映画	**6**	2	2	2
	デパート	**9**	2	2 →**3**	5 →**4**
×	公園	**6**	2	3	1
×	家にいる	**3**	1	1	1

176

パレート効率性

- 売手も含めたすべての参加者の効用の総和 (社会的余剰) が最大化されること
  - パレート効率的な割当てでは, 財は最も高い評価値を持つ買手に割り当てられる.
  - 例: $8000の買手が$7000で落札
    - この買手の効用: $8000 - $7000=$1000
    - 売手の効用: $7000
    - 社会的余剰: $8000


$8000

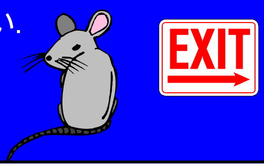
$7000

$6000


177

オークションメカニズムの設計

- メカニズムを設計することはゲームのルールを決めること.
- 個々の参加者の具体的な行動まではコントロールできない.
  - 正直に行動する／不正行為をしない等は強制できない.

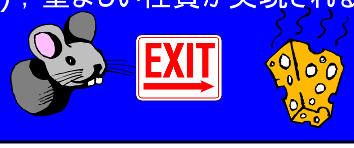


178

オークションメカニズムの設計

望ましい性質 (e.g., パレート効率性) を達成するには?

- 以下のようにルールが設定できれば良い.
  - 各参加者にとって支配戦略が存在する.
  - 全員が支配戦略を取った場合 (支配戦略均衡), 望ましい性質が実現される.



179

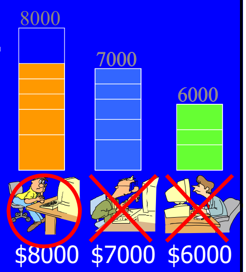
メカニズム：英国型

- メカニズム：入札者は自分の付け値を増やすことができる. だれも値の変更を望まなくなった時点で, 最高値の入札者が落札
- 個人価値の場合の事後均衡となる戦略：自分の付け値が最高値で無い場合, 現時点での最高値から少額だけ競り上げ続け, 自分の評価値に達したら降りる
- 事後均衡(ex post equilibrium)：他者が(そのタイプに関わらず)均衡戦略を取る限り, 自分も均衡戦略を取ることが最適(支配戦略均衡より弱く, ナッシュ均衡より強い)

180

メカニズム: 英国型

- 事後均衡では, 最も高い評価値を持つ人が, 二番目に高い評価値+少額で落札
- 結果はパレート効率的



181

メカニズム：Vickrey (第二価格秘密) 入札

- メカニズム：各入札者は他者の付け値を知らされずに入札する. 最も高い付け値をつけた入札者が, 二番目に高い付け値で落札
- 支配戦略 (個人価値の場合)：自分の評価値を入札するのが支配戦略 (正直が最良の策／誘因両立性)
- 結果はパレート効率的
- 英国型と得られる結果は同様

182

メカニズム：第一価格秘密入札

- メカニズム：各入札者は他者の付け値を知らされずに入札する. 最も高い付け値をつけた入札者がその付け値で落札
- 支配戦略：一般には存在しない

183

準備：確率変数の基礎

- 確率変数 t：確率的に値を取る変数
- 例えば，3回コインを投げて，表がでる回数を表す確率変数 t を考える
- t=0の確率は1/8, t=1の確率は3/8, t=2の確率は3/8, t=3の確率は1/8
  - すべての可能性を足すと1
  - t の期待値は 0*1/8+1*3/8+2*3/8+3*1/8=12/8=1.5
  - t^2 の期待値は 0*1/8+1*3/8+4*3/8+9*1/8=24/8=3
- t が連続的な値を取る場合 (例えば0から1までの実数値)，t の取り得る値は無限個
- よって，t がある一点を取る確率 (t=0.5等) は無限に小さい
- 一方，t がある範囲にある確率 (例えばtが0.1から0.5まで) は求められる

184

確率変数の基礎

- 連続的な値を取る場合，t がx以下である確率を，累積分布関数 F(t≦x)で表す
  - t が[0, 1]の一様分布なら，F(t≦x)=x
- 累積分布関数を一階微分したのが確率密度関数 f(x)
  - t が[0, 1]の一様分布なら，f(x)=1
- 確率密度関数を，ある範囲で積分すれば，確率変数がその範囲の値を取る確率が得られる
  - t が[0, 1]の一様分布，tが0.1から0.5の間である確率：

$$\int_{0.1}^{0.5} f(x)dx = \int_{0.1}^{0.5} 1dx = \left[x\right]_{0.1}^{0.5} = 0.5-0.1 = 0.4$$

- t の最小値を0，最大値をt_{max}として，y=g(x)で与えられるyの期待値：

$$\int_{0}^{t\max} g(x)\cdot f(x)dx$$

- t が[0, 1]の一様分布，t^2の期待値

$$\int_{0}^{1} x^2 \cdot 1dx = [x^3/3] = 1/3$$

185

演習：ベイジアンナッシュ均衡 (第一価格秘密入札)

- 2人の入札者，リスク中立，評価値は0から100の間の一様分布
- ベイジアンナッシュ均衡は?
- とりあえず，相手の入札yが $[0, y_{max}]$ の一様分布だと仮定して，最適反応を求める
- yの分布関数はy/ y_{max}, 密度関数は$1/ y_{max}$
- 相手の入札額をyとして，自分の評価値をx，入札額をx′とする
- 明らかにx′>y_{max}とするのは無意味，x′≦ y_{max}を仮定
- 期待効用をx′, x, y_{max} の式で表して，これを最大化するx′を求める

186

ベイジアンナッシュ均衡

- y<x′なら自分の勝ちで，効用はx-x′
- yの分布関数は y/y_{max}
- 勝つ確率：yがx′以下の確率=x′/y_{max}
- 期待効用は (x-x′)　x′/ y_{max}
  - x′=x/2のとき最大で x^2 / 4 y_{max}
- 評価値の半分を入札するのが最適反応
- 互いに評価値の半分を入札するのがベイジアンナッシュ均衡となる