

水曜1限 ゲーム理論

アドバンスドトピック

戦略的投票とゲーム理論

2017年5月10日

東藤 大樹

1

投票 (voting)

- 集団の意思決定のためのプロセス
 - 政治的決定、近年では司法的決定にも
 - オープンソースでのソフトウェア開発の意思決定 (Apache など)
- 社会選択理論と呼ばれる領域の研究
 - 伝統的には、政治経済学における分野
 - 計算機科学分野からの貢献も

2

学術的背景： 社会選択理論と計算機科学

- 理論計算機科学分野でゲーム理論が注目を集めている (横尾先生の講義内容)
- ゲーム理論と密接に関わる社会選択理論も注目されるように
 - ネットワーク上での意思決定の基礎理論
 - 特に、社会選択ルール (例: 投票ルール) の計算量や、個人情報の受け渡しに必要な情報量など
 - アルゴリズム的ゲーム理論 (1999~)
 - 計算論的社会選択理論 (2005~)

3

戦略的投票

- 投票者の選好は個人情報
- 同時に投票する場合に、最適戦略を計算することは難しい
- しかし、何らかの形で投票者の選好が明らかになる場合も多い
 - 委員長・リーダーの選挙などは、グループで議論した後投票
 - Web 上の投票予測
- このような場合、戦略的投票が起こると、投票者の真の選好を決定に反映できない

4

概要

- 様々な投票制度 (投票ルール) が存在
 - ルールが変われば結果も変わる
- ギバード＝サタースウェイトの定理
 - 戦略的投票に関するネガティブな結論
- 問題の制限によるポジティブな結果

5

本日の内容

1. モデル
2. ギバード＝サタースウェイトの定理
3. 単峰的選好と中位投票者ルール
4. まとめ

6

1. モデル

7

モデル

- 候補者の集合 $M = \{\dots, x, y, z, \dots\}$, 候補者数 m
- 投票者の集合 N , 投票者数 n
- 投票者 i の、候補者に関する選好 $\succsim_i \in R$
 - 選好は、候補者の順序として表される
 - 投票者 1 が選好 $\succsim_1: x > y > z > v$ を持つとき、投票者 1 は候補者 x が当選することを最も好み、以降 y, z, v の順に好む
 - 存在しうる選好の集合 (選好ドメイン) R は一般に、候補者の任意の順序を含む
 - 即ち、 $|R| = m!$
- 投票者は利己的 (selfish) であると仮定

8


投票ルール

- 投票者の選好から候補者一人を当選者として選択する関数

$\succsim_1: x > y > z > v$
 $\succsim_2: y > x > z > v$
 $\succsim_3: z > y > x > v$

$f: R^n \rightarrow M$

- 各投票者 i は、投票ルールに自分の選好 \succsim_i を表明
- 投票者は利己的であり、真の選好を表明するとは限らない
- 投票ルールは表明された選好から当選者を選択



x

- 様々な投票ルールが存在し、それぞれ異なる特性を持つ

9

例 1 : 最多得票者ルール (Plurality Rule)

- 表明された選好の中で、選好の先頭に現れた回数が最多の候補者が当選
 - 投票者に、最も好む候補者に投票させることと同じ
 - 同点の場合、あらかじめ決められた優先順位に従って当選者を決定する、と仮定
- 多くの国における選挙の投票ルール
 - 投票・結果の集計が容易
- 『極端な』候補者が当選する可能性
 - 全体に平均的に好まれるより、半数+1人に最も好まれた方が当選できる

10

コンドルセ勝者 (Condorcet Winner)

- 単純多数決 (1対1の投票) を用いる
 - 任意の2候補者に対し、各投票者は好む方に投票
 - 各候補者は、自分以外の $m-1$ 人と単純多数決で勝負
 - 自分以外の $m-1$ 人全員に単純多数決で勝利する候補者が存在するとき、その候補者をコンドルセ勝者と呼ぶ
- コンドルセ勝者は存在しないこともある
 - その場合、当選者が決まらないため、厳密には投票ルールと言えない
 - 候補者の優先順位や単純多数決の勝利数などを用いて、当選者を決めることは可能

11

ボルダの投票ルール (Borda Rule)

- 表明された選好の先頭から順に $m-1, m-2, \dots, 0$ の各点を与え、得点が最多の候補者が当選
 - 同点の場合、最多得票者ルールと同様、優先順位を用いて当選者を決定すると仮定
- 一部の投票者から $m-1$ 点を得るより、より多くの投票者から $m-2$ 点を得た方が、当選しやすい
 - 平均的に好まれる候補者が当選?

12

クイズ： 各投票ルールによる勝者の違い

- 4 候補者、5 投票者で、各投票者が右の選好を表明していると仮定
- 以下の各ルールによる当選者を求める：
 - 最多得票者ルール
 - 最も好む候補者に投票
 - コンドルセ勝者
 - 単純多数決全勝の候補者
 - ボルダの投票ルール
 - 先頭から 3,2,1,0 を割当

$$\begin{aligned} \approx_1: & x > y > z > v \\ \approx_2: & z > x > y > v \\ \approx_3: & v > x > y > z \\ \approx_4: & y > v > x > z \\ \approx_5: & y > z > x > v \end{aligned}$$

13

回答

- 最多得票者ルール
 - $x:1, y:2, z:1, v:1$
 - 2票得た y が当選
- コンドルセ勝者
 - $x > y, x > z, x > v,$
 $y > z, y > v, z > v$
 - x がコンドルセ勝者
- ボルダの投票ルール
 - $x:9, y:10, z:6, v:5$
 - 最多得点の y が当選
- 投票ルールが変われば勝者も変わる

$$\begin{aligned} \approx_1: & x > y > z > v \\ \approx_2: & z > x > y > v \\ \approx_3: & v > x > y > z \\ \approx_4: & y > v > x > z \\ \approx_5: & y > z > x > v \end{aligned}$$

14

2. ギバード=サタースウェイトの定理

15

投票ルールの評価

- どの投票ルールを用いるべきか、という問いに対し、絶対的な答えはない
- しかし、投票ルールが満たすべき、いくつかの規範的性質は知られている
- 例えば
 - 全射性
 - 非独裁性
 - 戦略的操作不可能性

16

全射性

- 全ての候補者に当選の可能性が存在する、という性質
- 全射性を満たさない投票ルールは候補者にとって不公平

17

非独裁性 (Non-Dictatorship)

- 独裁投票者 (dictator) が存在しないという性質
 - 独裁投票者: 他者の表明した選好に関係なく、自分が表明した選好の先頭の候補者が当選する投票者
 - 独裁投票者は複数存在しえない
 - 複数存在すると仮定すると矛盾
- 非独裁性を満たさない投票ルールでは、社会全体の意思を決定に反映できない

18

戦略的操作不可能性

- 各投票者が自分の真の選好を表明することがナッシュ均衡（正確には弱支配戦略均衡）
 - 虚偽の選好を表明しても、自分の真の選好のもとでより良い候補者が当選することはない
- 戦略的操作不可能性を満たさない投票ルールでは、投票者の真の選好を集計できない
 - 投票者は利己的であるため、表明された選好が真の選好である保証はない
 - 例えば、最多得票者ルールは戦略的操作不可能性を満たさない

19

クイズ：

最多得票者ルールにおける戦略的操作

- 4 候補者 x, y, z, v 及び 3 投票者 1, 2, 3 が存在するとき、最多得票者ルールによる投票を考える
 - 最も好む候補者に投票させることと同値
 - 同点の場合、 $x \succ y \succ z \succ v$ の優先順位で当選者を決定すると仮定
- 最多得票者ルールが戦略的操作不可能性を満たさないことを示したい
 - ヒント：他の投票者の戦略（＝選好の表明）を固定し、ある投票者が虚偽の選好を表明して得をする例を構築すればよい

20

回答例

- 3 人の投票者の真の選好が右で与えられるとする
- 投票者 1・2 が真の選好を表明すると仮定
- 投票者 3 が真の選好を表明すると、 x, y, z が同点
⇒ 優先順位から x が当選
- 投票者 3 が
 $\succ_3: y > z > x > v$
を表明すると y が当選

$$\begin{aligned} \succ_1: & x > y > z > v \\ \succ_2: & y > x > z > v \\ \succ_3: & z > y > x > v \end{aligned}$$

21

ギバード＝サタースウェイトの定理

- $m (>2)$ 候補者が存在し、選好ドメイン R が任意の候補者の順位付けを含む（即ち $|R| = m!$ ）とき、次の 3 つの性質を全て満たす投票ルールは存在しない（証明は省略）：
 - 戦略的操作不可能性
 - 全射性
 - 非独裁性
- 即ち、投票ルールを選ぶ際、3 つの望ましい性質のうち少なくとも一つを諦めなければならない
- 社会選択理論における最重要定理の一つ

22

最小要求性の確認 (1/2)

- 3 つの性質のうち 1 つを諦めれば、残りの 2 つの性質を満たす投票ルールが本当に作れる？
- 戦略的操作不可能性を諦めると…
 - 最多得票者ルールは全射的かつ非独裁的
 - 全員が同じ候補者に投票するとその候補者が当選
⇒ 全射性を満たす
 - 投票者 i 以外の全員が候補者 a に投票しているとき、投票者 i が別の候補者 b を当選させることは不可能
⇒ 非独裁性を満たす

23

最小要求性の確認 (2/2)

- 全射性を諦めると…
 - 投票者の表明した選好に依存せず、常にある候補者を当選させる投票ルールを考える
 - 表明した選好に依存せず当選者が決まるので、虚偽選好を表明する誘因はない ⇒ 戦略的操作不可能
 - 同様に、独裁投票者も明らかに存在しない
- 非独裁性を諦めると…
 - ある投票者を独裁投票者とする投票ルールを考える
 - 独裁投票者は任意の選好を表明可能 ⇒ 全射
 - 独裁投票者が虚偽表明の誘因を持たないことは自明
 - 独裁投票者以外は、選好を考慮されないため、やはり虚偽表明の誘因を持たない ⇒ 戦略的操作不可能

24

単峰的選好と中位投票者ルール

25

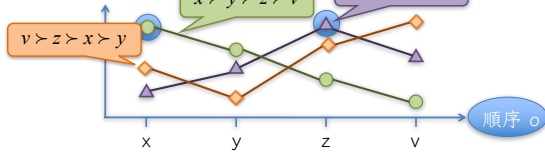
不可能性定理に対する ドメインの制限によるアプローチ

- ギバード=サタースウェイトの定理は、投票ルール設計の困難さを示している
 - 一般に不可能性定理と呼ばれる
- 一方、選好ドメインは非制限 (IRI=m!) であった
- 選好ドメインを制限すると、少しポジティブな結果を得られる
 - 世の中に存在する選好を限定することで、考慮すべき戦略的投票が減少
 - 戦略的操作不可能な投票ルールが設計しやすくなる
- 単峰的選好 (single-peaked preference) に注目

26

単峰的選好

(Single Peaked Preference)

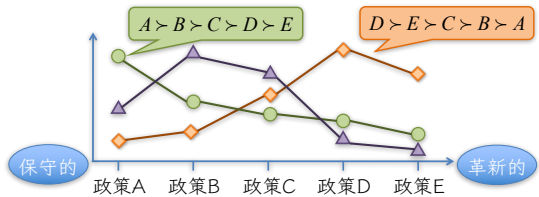


- 候補者の並び o を考える
- ある候補者 p が存在し、並び o の上で p から離れるに従い選好順序が下がるような選好を、単峰的選好と呼ぶ
 - この p のことを選好のピーク (peak) と呼ぶ
- 選好ドメイン (世の中に存在する選好の集合) R 内の任意の選好が、ある並び o について単峰的であるとき、 R を単峰的ドメインと呼ぶ

27

単峰的ドメインの例: 政策に関する投票

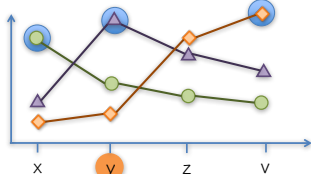
- 革新派の投票者は、保守的政策を好まない。逆も同様。



- 注意: 任意の候補者の並びの下で単峰的でなくてもよい
- ある候補者の並び (この例では政策の並び) が作れて、その並びの下でドメインに含まれる任意の選好が単峰的となれば、そのドメインは単峰的ドメイン

28

中位投票者ルール



- 投票者数が奇数であると仮定
- 各投票者のピークのうち、中央値 (median) にあたる候補者を当選者とする
- ギバード=サタースウェイトの定理の要求する3つの性質を全て満たす

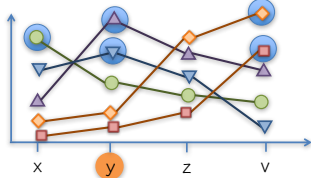
29

中位投票者ルールの性質

- 独裁者は存在しない
 - 実際、より厳しい性質である匿名性も満たす
 - 匿名性: 投票者の名前を入れ替えても、当選者は変わらない
- 全射性も明らか (ピークが全会一致ならば必ず当選)
- 戦略的操作不可能性も満たす
 - 中位投票者ルールにおいて、意味がある情報はピークのみ
 - 自分のピークが中央値より左側の場合、自分のピークを中央値より右側に表明しなければ、中央値は移動しない
 - しかし、自分のピークを中央値より右側に表明すると、中央値は右側に移動。自分にとって結果は改善しない。
- また、単峰的ドメインではコンドルセ勝者は唯一定まり、中位投票者ルールは常にコンドルセ勝者を選ぶ

30

一般化中位投票者ルール



- 投票者数 n に対し、仮想投票者を $n-1$ 人用意
 - 仮想投票者の単峰的選好は任意に定めてよい
 - 投票者の投票前に、仮想投票者が真の選好を表明
 - 仮想投票者の選好が投票者の投票に依存してはいけない
- 合計 $2n-1$ 個のピークに対して中位投票者ルールを適用する
- 定理：単峰的ドメインにおいて、一般化中位投票者ルールは、戦略的操作不可能性、全射性、匿名性を全て満たす

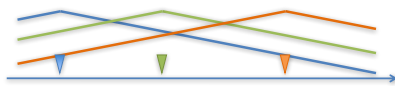
31

応用：施設配置問題 (1/2)

- 国道沿いにバス停を設置したい
- 国道沿いに住む住民が、希望設置場所を申告
 - 例えば自宅の所在地など
 - 住民の効用はバス停と希望設置場所との距離に依存
 - 設置場所に近いほど嬉しく、離れるほど悲しい
- 戦略的操作不可能性、全射性、匿名性を満たすバス停配置ルールは？

32

応用：施設配置問題 (2/2)



- 単峰的ドメインとして表現できる
 - 候補者（候補配置場所）は実軸（国道）上の点
- 例えば、次のような配置ルールを考える：
 - あらかじめ点 a を任意に選ぶ
 - 全員の希望設置場所が a から見て同じ方向にあれば、そのうち a に最も近い点にバス停を設置
 - 希望設置場所が a の両側に少なくとも一つずつあれば、 a にバス停を設置
- 一般化中位投票者ルールとして表現可能
 - 仮想投票者のピークをどのように定める？

33

まとめ

34

まとめ

- 様々な投票ルールと、その計算
 - 最多得票者、コンドルセ勝者、ボルダの投票ルール
- ギバード＝サタースウェイトの定理
 - 選好ドメインが非制限 ($|R|=m!$) であるとき、戦略的操作不可能性、全射性、非独裁性の3つを同時に満足する投票ルールは存在しない
- 単峰的選好と中位投票者ルール
 - 単峰的選好に制限した場合、戦略的操作不可能性、全射性、非独裁性の3つを満足する投票ルールが存在
 - 例：一般化中位投票者ルール

35