58

ゲーム理論
(第3回 ゲーム理論の基礎 II)

九州大学大学院システム情報科学研究院
情報学部門
横尾 真
E-mail: yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp
http://agent.inf.kyushu-u.ac.jp/~yokoo/

59

集団での混合戦略?

- テレビ局から電話がかかってきた…
  - あなたと，他の3名（合計4名）に100万円の賞金が当選しました．
  - ただし，賞金をもらえるのは（高々）一名だけです．
  - 今，他の当選者にも同時に電話がつながっています．
  - あなた方の中で，ちょうど一名のみが賞金を受けると言って，残りの三人が辞退した場合にのみ，欲しいと言った人に100万円が与えられます．その他の場合には誰にも賞金は与えられません．
  - いますぐ，辞退するか受けるか決めてください．
- どうすればよい?

60

集団での混合戦略?

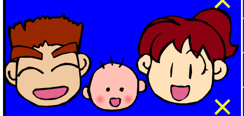
他の三人が友人で，確実に後で山分けできる場合:
- もちろん，あらかじめ打ち合わせしておけば100%賞金が得られる
- そうでない場合，期待値を最大化するなら，各自が確率1/4でyesと答えれば良い （コインを二枚投げて，両方とも表の場合に限りyesと言う）

全くの他人で，山分けが期待できない場合:
- Yesというしかない

61

パレート効率性

- パレート支配：状態xとx'を比較して，すべてのプレイヤがxの方がx'より望ましい (あるいは同じ) と思っており，少なくとも一人がxの方が厳密に良いと思っている場合，xはx'をパレート支配する
  - x'の代わりにxを選ぶことに反対するプレイヤはいない
- パレート効率的：他のどんな状態にもパレート支配されない状態はパレート効率的
  - いずれかの参加者の効用を犠牲にすることなしには，他の参加者の効用を向上することができない状態



×	映画	2	2	2
	デパート	2	2	5
	公園	2	3	1
×	家にいる	1	1	1

62

パレート効率性 (続き)

- 1000円を二人で分ける
- 捨てても構わない
- (0, 1000), (x, 1000-x), (1000, 0)のいずれもパレート効率的
- 500円捨てて (250, 250)よりも，(250+x, 750-x)の方が良いことは二人とも合意可能

63

パレート効率性 (続き)

- そもそも異なるプレイヤの効用が比較できるか，同じ尺度で計れるかに関しては議論がある
- パレート効率性の定義は，プレイヤ間の効用が比較できない場合でも適用可能
- 社会的な望ましい状態に関する，最低限の要求条件
  - x'がパレート効率的でなければ，別の状態xがあり，全員がxの方が良い (少なくとも同じ) と思っている

64

合理的なプレイヤ

- 合理的なプレイヤは，全知全能を尽くして，自分の効用を最大化しようとする
- ゼロサムゲームなら，どの結果であってもパレート効率的
- ゼロサムでないなら，二人の幸せは それなりに両立可能
- 無知な／能力のないプレイヤが集まっているなら，二人とも不幸になるかもしれない
- 一方，合理的なプレイヤ同士の対戦なら，どちらがより多く得るかは分からないが，結果は少なくともパレート効率的になるのではないか?
- 賢いプレイヤが，みすみす効用を捨てるとは考え難い

65

囚人のジレンマ

- 警察が二人の囚人を捕らえている．
  - 2人とも自白しなければ釈放される．
  - 一人が自白し，一人が自白しなければ，自白したほうは報奨金を与えられ釈放され，もう一人は厳しい刑を受ける．
  - 両方とも自白した場合は通常の刑を受ける．

		II	
		D	C
I	D	2, 2	4, 1
	C	1, 4	3, 3

66

囚人のジレンマ (続き)

- 協力・協力: (3, 3) は，
裏切り・裏切り: (2, 2) をパレート支配する
- 支配戦略均衡がパレート効率的にならないのが非常に気持ち悪い
- 合理的で賢いプレイヤなのに，パレート効率的な状態にたどり着けない!

67

ゲームが繰り返される場合

- 例えば，3回同じ相手とゲームをプレイする場合，反復支配戦略均衡を考える
- 最後の回から考える
- 相手が合理的なら，最後の1回は絶対裏切る
- よって，2回目で協力して恩を売っても無駄
- よって2回目も二人とも裏切る
- そうすると初回も裏切るしかない!
- 合理的なプレイヤ同士なら，3回とも裏切るのが反復支配戦略均衡

68

ゲームが繰り返される場合 (続き)

- 繰り返しが4回だとすると，
  - 最後から3回目 (最初から2回目) までは前と同じ議論が成り立つ
  - よって初回も裏切るしかない
- 繰り返しが100回でも1000回でも同じ結論が導ける
- 有限の繰り返しなら裏切りしか出てこない!
- 注意：合理的でない相手に対しては，裏切らない方が良い場合もある

69

宝石の分配

問題設定：

- A, B, C, D, Eの5人の海賊が，100個の宝石を分配しようとしている
- Aから順に，分配方法 (誰がいくつ取るか) を提案する．
- 提案された分配方法に対して，提案者も含めて多数決を取る (同数の場合は否決とみなす)
- 可決の場合は提案方法を採用，否決の場合は，提案者を皆で殺して，次の順番の海賊が提案を行う

仮定：

- 自分は死にたくない (全く宝石がもらえなくても死ぬよりはまし)
- よりたくさんの宝石がもらえる方が (他者の生死に関わらず) うれしい
- もらえる宝石の数が同じなら，大勢殺した方がうれしい

Aは何を提案したら生き延びて，より多くの宝石を手に入れられるか?

70

宝石の分配 (続き)

- A, B, Cが殺され，Dが提案する場合を考える.
- EはDのどんな提案も反対し，Dの提案は否決される
- Eが100個手に入れ，効用は (A:-∞, B:-∞, C:-∞, D:-∞, E:100+4ε)

71

宝石の分配 (続き)

- A, Bが殺され，Cが提案を行う場合を考える.
- EはCのどんな提案も反対する
- DはCのどんな提案でも受け入れる (自分の番になれば死ぬのは確実)
- Cの提案，”俺が全部取る”は，C, Dの賛成で可決，効用は (A:-∞, B:-∞, C:100+2ε, D:0+2ε, E:0+2ε)

72

宝石の分配 (続き)

- Aが殺され，Bが提案を行う場合を考える.
- CはBのどんな提案も反対する
- D, Eは一個もらえれば満足 (Cの番になれば何ももらえない)
- Bの提案，”俺が98, D, Eは一個ずつ”は，B, D, Eの賛成で可決，効用は (A:-∞, B:98+ε, C:0+ε, D:1+ε, E:1+ε)

73

宝石の分配 (続き)

- Aが提案を行う場合を考える
- Bに順番が回った場合は (A:-∞, B:98+ε, C:0+ε, D:1+ε, E:1+ε)
- 自分以外の二人以上の賛成が得られればよい
- 例えば，”俺が97, Cは1, D (or E) は2” なら，可決された場合の利益は，(A:97, B:0, C:1, D:2, E:0)，よってA, C, Dの賛成多数で可決!

74

宝石の分配 (続き)

- A以外が共謀すればもう少し利益を増やせるか?
- Cの提案にD, Eが共謀して反対することはない --- 絶対EはDを裏切る
- よってCに回った場合の結果は安定
- 同様に，Bの提案に，C, D, E中の少なくとも二人が共謀して反対することはない
- よってBに回った場合の結果は安定
- 同様に，Aの提案にB, C, D, E中の少なくとも三人が共謀して反対することはない
- (人質を取るとかの) 強制力がないと，安定した共謀は成立しない

75

囚人のジレンマトーナメント

- ミシガン大学のロバート アクセルロッド (政治学者) が主催したトーナメント
- コンピュータのプログラム同士が繰り返し囚人のジレンマをプレイする
- 合計の得点が多いプログラムが勝ち

76

囚人のジレンマトーナメント (続き)

- 常に裏切りが勝つとは限らない
- 相手が合理的であるとは限らない
- 自分のプレイは他者に観察されている
- 裏切るやつだと思われると，裏切られる
- 協力しかしないお人よしだと思われると，やはり裏切られる
- どうプレイするのが良いか?

77

囚人のジレンマトーナメント (続き)

- 勝利を収めたのは，もっとも単純なプログラム
- しっぺ返しと呼ばれる
- 最初は協力する
- 以降は相手の前回の行動をまねするだけ
- 前回 裏切った相手には裏切りで，協力した相手には協力で返答する
- 特徴:
  - 裏切り続ける相手には，ずっと裏切り返す
  - 協力する相手にはずっと協力する
  - 執念深くない

78

囚人のジレンマトーナメント (続き)

- 第二回も開催された
- しっぺ返しを打ち破るための様々なプログラムが参加
- しかし，結果はしっぺ返しが続けて勝利
  - 確かに，新しいプログラムはしっぺ返しとの対戦では相対的に勝った (得点が多い)
  - 一方，新しいプログラム同士の対戦で，双方が悲惨な結果に終わる
  - 結果，合計得点ではしっぺ返しの勝利 (誰にも勝たないが，悲惨な結果とはならない)
  - 目的は今現在の対戦相手より大きな得点を得ることではなく，最終的な合計金額を大きくすること
  - 相手から協力を引き出せる戦略が有効

79

繰り返し囚人のジレンマゲーム

- 囚人のジレンマゲームを，同じ相手に対して繰り返しプレイすることを考える
- 各ゲームの最後にコインを振って，表が出れば（確率δ）ゲームは継続，裏が出れば（確率$1-\delta$）ゲームは終了とする
- 要は，ゲームがいつ終わるか分からない
- 無限の将来に渡る期待利得の合計が有限な値となる
- δは割引率と呼ばれる
- この場合，δが大きければ（長い付き合いになりそうなら），協力し合う均衡が存在⇨合理的なプレイヤが協力関係を維持可能

80

ゲームの均衡

- 支配戦略均衡，反復支配戦略均衡が存在しない場合にどうする?
- 支配戦略均衡の条件を弱めた均衡の定義を考える
  - ナッシュ均衡

81

ナッシュ均衡

- 戦略の組 (s, t) は，互いに相手の行動に対する最適な反応となっているときにナッシュ均衡
- 支配戦略均衡なら必ずナッシュ均衡，逆は言えない
- ゼロサムゲームの鞍点はナッシュ均衡
- ナッシュ均衡が唯一なら，多分合理的プレイヤ同士の対戦はナッシュ均衡に落ち着く
  - 他の状態は不安定

II

I				
	7	2	5	1
	2	2	3	4
	5	3	4	4
	5	2	1	6

ナッシュ均衡

- チキン（弱虫）ゲームでは二つのナッシュ均衡がある
  - (D, C)
  - (C, D)
- どちらに落ち着くかは分からない

		II: D	II: C
I	D	1, 1	4, 2
	C	2, 4	3, 3

複数のナッシュ均衡

- 強制力を持たない第三者（マスコミ，知人等）が（特に根拠はなく）予想を発表したとする
  - "きっと (C, D) となる"
- 各プレイヤが，自分はとにかく，相手の行動に関して予想を信じたとする
  - プレイヤIが，プレイヤIIがDを選ぶと思う
- そうすると，プレイヤIはCを選ばざるを得ない
- プレイヤIIも同様に考えるとすると，予想は的中する
  - みんなが値上がりする／暴落すると信じている株が，根拠はなくても値上がりする／暴落するようなもの

		II: D	II: C
I	D	1, 1	4, 2
	C	2, 4	3, 3

混合戦略におけるナッシュ均衡

- 定理：任意のゲームは混合戦略に関して少なくとも一つのナッシュ均衡を持つ (Nash 1951)
- じゃんけんでは確率1/3で手を選ぶのがナッシュ均衡
- ナッシュ均衡が複数存在する場合もある

クイズ：ナッシュ均衡は?

- 階段で二人がじゃんけん
- グーで勝てば3歩，チョキで勝てば6歩，パーで勝てば6歩進める
- 先に上りきった方が勝ち

	0, 0	1, -1	-2, 2
	-1, 1	0, 0	2, -2
	2, -2	-2, 2	0, 0

クイズ：ヒント

- 対称なゼロサムゲームなので，均衡での期待利得は0になるはず
- 相手がグーを出す確率をx，チョキを出す確率をy，パーを出す確率を1-x-yとする
- 自分の期待利得は，何を出しても同じになり，かつ期待利得は0

	0, 0	1, -1	-2, 2
	-1, 1	0, 0	2, -2
	2, -2	-2, 2	0, 0