

## ゲーム理論 (第2回 ゲーム理論の基礎 I)

九州大学大学院システム情報科学研究院  
情報学部門  
横尾 真

E-mail: [yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp](mailto:yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp)  
<http://agent.inf.kyushu-u.ac.jp/~yokoo/>

## ゲーム理論は何の役に立つか?

- 様々な場面での意思決定に使える
  - 複数の選択肢から一つを選ぶ
  - 自分の選択だけではなく、他者 (偶然も含む) の選択が結果に影響する
- 自分の意思で行動する複数のプレイヤーが存在する状況で、どのような結果が生じるかを予測することができる
- より良い社会的ルールの設計に使える

## 基本的な用語

**プレイヤー:** 意思決定を行う個々の主体、複数存在、当面は二人のみとする

**行動:** プレイヤーの選択、当面はプレイヤーは一回だけ、同時に行動を選択とする

**利得:** 当面、プレイヤーの行動の組合せに対して定義される数値とする。結果に対する各プレイヤーの効用 (うれしさ) を示す。大きいほうがよりうれしい

## 2人ゲーム

- 前述のゲームは以下のような行列で記述できる (利得行列, payoff matrix)
- プレイヤーは横の列 (row) もしくは縦の列 (column) に対応
- 各row/columnが行動
- 各セルが行動の組合せ
- 左下がrow側の利得, 右上がcolumn側の利得

		プレイヤーII	
		F	S
プレイヤーI	F	4, 4	2, 8
	S	8, 2	1, 1

## 例: 新聞社の競争

- 2つのライバル新聞社が存在
- 選択として、経済 (Finance) ニュースをトップにするか、スポーツ (Sports) ニュースをトップにするかのどちらか
- 80%の人は経済ニュースがトップなら買い、20%の人はスポーツニュースがトップなら買う

		II	
		F	S
I	F	4, 4	2, 8
	S	8, 2	1, 1

## 合理的なプレイヤー

- プレイヤーは合理的 (rational) である
  - 自分の利得を最大化しようと最大限の努力をする
  - 人の利得には無関心
  - 相手をあまりいじめては気の毒とか、不公平なのがいやだとかは思わない
  - 利己的というより、そのような感情があるなら、それはすべて利得に表現されていると仮定

		II	
		F	S
I	F	4, 4	2, 8
	S	8, 2	1, 1

### 仮定

- プレイヤは、自分の選べる行動の集合、相手の選べる行動の集合、それらの組合せにおける自分／相手の利得 (要は利得行列)を曖昧性なく知っている
- もちろん、相手がどの行動を選ぶかは知らない

		II	
		F	S
I	F	4 / 4	2 / 8
	S	8 / 2	1 / 1

### 仮定 (続き)

- プレイヤは、お互いに相談することなく、同時に行動を選択する
  - 俺はこれを選ぶから、君はこうしてくれとか、これを選んでくれたら1万円あげるとかの相談はできない
  - 後出しもなし

		II	
		F	S
I	F	4 / 4	2 / 8
	S	8 / 2	1 / 1

### 例: 新聞社の競争

- 自分がプレイヤーIだったらどうするか?
- もちろん、ベストな結果は自分がF、相手がSを選ぶことだが、相手の行動はコントロールできない
- 相手もバカではなく (逆に非常に賢くて)、自分の利益を最大化しようとしている

		II	
		F	S
I	F	4 / 4	2 / 8
	S	8 / 2	1 / 1

### 支配戦略

戦略: 行動の選び方

支配戦略: 相手がどの行動を選ぼうが、他の戦略よりも得られる効用が高い (か少なくとも同じ) 戦略

- 明らかに合理的なプレイヤーなら、支配戦略があればそれを選ぶ
- 相手も合理的かどうかは気にしなくても良い (どんな変わった相手でも、また、相手の利得が不明でも問題ない)

		II	
		F	S
I	F	4 / 4	2 / 8
	S	8 / 2	1 / 1

### 支配戦略均衡

各プレイヤーが支配戦略を持つとき、その組合せを支配戦略均衡と呼ぶ

- 合理的プレイヤー同士が対戦した場合、もしゲームに支配戦略均衡があるなら、結果は支配戦略均衡になると予想できる

		II	
		F	S
I	F	4 / 4	2 / 8
	S	8 / 2	1 / 1

### 支配戦略

存在するとは限らない

- じゃんけん: 明らかに支配戦略はない
- ゲーとパーしかできないじゃんけんを考えれば、パーが支配戦略
- 人間がプレイして面白いゲームには、普通は支配戦略はない (もしくは知られていない)
  - オークション等のメカニズムデザイン (制度設計) では、支配戦略が存在するようにルールを設計することが課題



### ビスマルク海の戦い

- 1943年の南太平洋
- イマムラ海軍将はビスマルク海を経由してニューギニアに日本軍を輸送しようとしている
- 距離の短い北ルートか、長い南ルートを選ぶ
- ケニー海軍将は、ルートを予測し軍用機を送って爆撃したい
- 予測を間違えると爆撃可能な日数が短くなる

		I	
		N	S
K	N	-2	-2
	S	2	2
S	N	-1	-3
	S	1	3

### ビスマルク海の戦い

- ゼロサムゲームの一種  
- 相手の得は自分の損
- ケニーにとっては支配戦略はない
- イマムラが北なら北を、南なら南を選ぶ方が良い
- ケニーはどうすべきか?

		I	
		N	S
K	N	-2	-2
	S	2	2
S	N	-1	-3
	S	1	3

### 反復支配戦略均衡

- 一方、イマムラにとっては、北を選ぶのが(弱)支配戦略
- イマムラが合理的なら、きっと北を選ぶ
- それなら、ケニーは北を選ぶべきである
- 支配される戦略を交互に取り除くことにより、反復支配戦略均衡が得られる
- 注意: 相手が合理的でないで困る

		I	
		N	S
K	N	-2	-2
	S	2	2
S	N	-1	-3
	S	1	3

### 箱の中の豚

- (動物の)心理実験で用いられた例
- 大きい豚と小さい豚が箱に入っている
- 豚が少し離れたところにあるボタンを鼻で押すと、餌箱から餌が出てくる
- 小さい豚がボタンを押すと、大きい豚が餌をほとんど食べてしまう
- 大きい豚がボタンを押すと、小さい豚も半分近く食べられる
- 豚たちはどういう行動を学習するか?

### 箱の中の豚

- 利得行列は右のとおり
- 大きいほうが強いとも限らない
- 失うものがない奴は強い!

		小さい豚	
		押す	待つ
大きい豚	押す	1, 4	5, 4
	待つ	9, -1	0, 0

### 反復支配戦略均衡の問題点

- 同点を含む場合  
- (R1, C1)?  
- (R1, C3)?
- 削除の順番によって結果が異なる
- R2を先に除くとC3が、R3を先に除くとC1が残る

		C1	C2	C3	
		R1	2, 12	1, 10	1, 12
		R2	0, 12	0, 10	0, 11
		R3	0, 12	0, 10	0, 13

## Min-max戦略

- 支配戦略均衡, 反復支配戦略均衡のどちらも存在しない場合にどうするか?
- 一つの考え方: 最悪の結果を避ける
  - Min-max戦略: 各行動に関して, 相手の行動によって生じ得る最悪の場合を想定し, その最悪の場合がもっとも良い行動を選ぶ

## Min-Max戦略

- 利得表は右の通り
- ゼロサムなのでプレイヤーIの利得のみを記述
- プレイヤIはどれを選ぶ?

		II			
		7	2	5	1
		2	2	3	4
I		5	3	4	4
		5	2	1	6

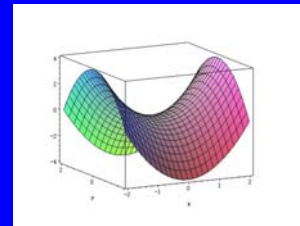
## 鞍点 (saddle point)

- プレイヤIIも同じように考えていたらどうなるか?
- IIは最大値を最小化する戦略を選択
- 右の交点は, 横から見ると極小, 縦から見ると極大の点となっている

		II			
		7	2	5	1
		2	2	3	4
I		5	3	4	4
		5	2	1	6

## 鞍点 (saddle point)

- ゼロサムゲームで鞍点があれば, 合理的なプレイヤーが対戦すれば結果は鞍点になると予想できる
- 一般には存在するとは限らない



## 鞍点が存在しない場合

- 直球が得意なバッター
- 直球に山を張って当たると8割打てる. 外れると全然打てない
- 変化球に山を張って当たると3割打てる. 外れても(直球なら) 1割は打てる

		ピッチャー	
		直	変
バッター	直	8	0
	変	1	3

出典: ゲーム理論トレーニング, 逢沢 明, かんき出版

## Min-Maxを使うと?

- 弱気なバッター: 全然打てないと困る, 変化球に山を張ろう. 外れても1割は打てる!
- 弱気なピッチャー: 8割も打たれちゃかなわん. 変化球にしとこう!
- 3割打てる!

		ピッチャー	
		直	変
バッター	直	8	0
	変	1	3

## 本当にこの結果が良いか?

- ピッチャーから見るとこの結果はばかっている
  - なんで山を張っているのが分かっているのに正直に変化球を投げる?
  - 直球を投げれば一割に抑えられる
- 一方、直球を投げられることが分かったら、バッターの方も黙って一割に抑えられることはない
  - 本来直球は得意!

	直	変
直	8	0
変	1	3

## 混合戦略

- ピッチャーは適当に直球と変化球を混ぜる
- バッターもどちらに山を張るかを場合によって変化させる
- このような戦略を混合戦略と呼ぶ
  - 一つの行動を選び続けるのを純粋戦略と呼ぶ

	直	変
直	8	0
変	1	3

## 混合戦略での鞍点

- ピッチャーが直球を投げるのが多いと思えば、バッターは直球により多く山を張れば打率が上がる
- 一方、バッターが直球に山を張ることが多いと思えば、ピッチャーは変化球を増やす
- いったいどこに落ち着くか?

	直	変
直	8	0
変	1	3

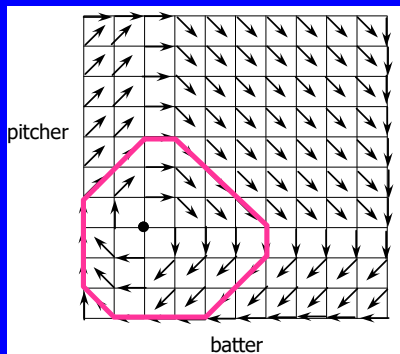
## 混合戦略での鞍点 (続き)

- バッターが直球を待つ確率を $x$ 、ピッチャーが直球を投げる確率を $y$ とする。
- 打率:  $xy*8 + x(1-y)*0 + (1-x)y*1 + (1-x)(1-y)*3 = 10xy - 3x - 2y + 3$
- $x$ に関して偏微分すると $10y - 3$ 
  - $y=0.3$ , つまりピッチャーが3割直球を投げると、バッターがどんな割合で待っても打率は一定で2割4分
- $y$ に関して偏微分すると $10x - 2$ 
  - $x=0.2$ , つまりバッターが2割直球を待つと、ピッチャーがどんな割合で投げても打率は一定で2割4分
- これも一種の鞍点となっている

	直	変
直	8	0
変	1	3

## 本当に安定するか?

- 相手の混合戦略に対して適応していった場合



## 演習: 混合戦略

- サッカーのペナルティキック
- キーパーが左に山を張って当たるとペナルティキックを8割止められる。外れても6割止められる
- 右に山を張って当たると7割止められる。外れても4割止められる
- 混合戦略における鞍点は?

		キッカー	
		左	右
キーパー	左	8	6
	右	4	7

## (単純化)ポーカー

- 以下のゲームを考える
- 後手はKingを持っている
- 先手にはAce, Queenの二枚から一枚がランダムに割り当てられる
- 先手は、1万円賭けるか、2万円賭けるかを選ぶ
- 先手が1万円賭けた場合は、直ちに勝負。カードが強い方が勝ち
- 先手が2万円賭けた場合、後手は1万円払って降りるか、2万円賭けるかを選ぶ
- 互いに、どのようにプレイするのが最適?
- カードの強さだけなら、平均的には公平なはず
- 期待利得は0?

## 単純化ポーカーの戦略

- 先手はAceを引けば確実に勝てる
- Aなのに2万円賭けないのは明らかに損。
- 先手はQの時に、いくら賭けるべき?  
予想: 負けるのは分かっているから、1万にすべき?
- 後手は、先手が2万賭けた時に、勝負するか降りるかが問題  
- 予想: 多分、先手はAを持っているから降りた方が無難?
- 混合戦略における鞍点を求めてみよう!

	降	勝負
常に2	1	0
A: 2 Q: 1	0	1/2

## 単純化ポーカーの戦略

- どちらの予想も誤り!
- 先手は、Qの時、確率1/3で2万賭ける、後手は、先手が2万賭けたら、確率1/3で降りる
- 先手の期待効用は1/3
- このゲームは公平ではない
- 先手は自分のカードを見た時点で(カードの強さだけなら)自分が勝っているか負けているか分かるが、後手は分からない
- 先手は持っている情報の優位性があり、それをういて期待利得を正にできる

	降	勝負
常に2	1	0
A: 2 Q: 1	0	1/2