244

# ゲーム理論
# (第10回 組合せオークションII)


九州大学大学院システム情報科学研究院
情報学部門
横尾 真
E-mail: yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp
http://agent.inf.kyushu-u.ac.jp/~yokoo/


245

## 復習：クラーク税

- GVAはクラークメカニズム，もしくはVickrey-Clarke-Grovesメカニズム，Clarke税と呼ばれる方法の一つのインスタンス
- より一般的な，グループ意思決定の場面で用いることができる
  - 例: この講義の補習 (全員参加!) を，土曜の午後に実施するかどうか決める
    - 補習をしない場合を0として，人によって効用は様々 ($20, -$10, ...)
    - 効用の和が正なら補習を実施し，負ならしない
    - 正直に効用を申告させるにはどうしたら良いか?

246

## 解答

- 各参加者は，自分の申告により結果が変わる場合，結果を変えるのに必要な最少額を税金として支払う
  - 参加者1: $20, 参加者2: -$10, 参加者3: -$20, 参加者4: $30
  - 補習は実施，支払額は以下:
    - 参加者1: $0, 参加者2: $0, 参加者3: $0, 参加者4: $10

247

## クラーク税の注意点

- 集めた税は，参加者以外の誰かに渡る必要がある --- 参加者内で単純に再分配してはいけない
- 例：集めた税で打ち上げの飲み会をする
  - 他人に多く税金を払わせれば，結果／自分の税額が変わらなくても利益になる
- オークションの場合は主催者が引き取るので問題ない

248

## クラーク税の再分配

- 主催者がいない場合にどうすればよい？

例： グループが車をシェアしている

- 週末に誰が車を使うか決めたい
- 各自が車を使うことの価値を申告し，Vickrey/second-price入札で勝者を決めれば，正直に効用を申告することが支配戦略
- 支配戦略均衡で最適な割当が実現される
- メンバ1: $100, メンバ2: $80, メンバ3: $60, メンバ4: $40だと，メンバ1が$80支払って車を使う
- しかし，$80を燃やすのはもったいない！

249

## 再配分方法

要求条件： 正直に申告することが支配戦略，なるべくお金を残さない，お金が足りなくなってはいけない

案1: 頭割り ($80/4=$20を配る)

- メンバ2に過大申告の誘因がある

案2: メンバ2を除いて頭割り

- メンバ2は過少申告して三番目になった方がよい

案3: メンバ2に，三番目の入札額/4，残りのメンバに二番目の入札額/4を配る --- 足りなくならない

- ほとんど大丈夫だが，メンバ2が多少の赤字を出して勝ち，より大きな再配分を得たほうが良い場合がある

**メンバ1: $100, メンバ2: $80, メンバ3: $60, メンバ4: $40 --- メンバ1が$80支払って車を使う**

250

## 再配分方法（正解）

- メンバ1, 2は，三番目の入札額/4=$60/4=$15を，残りのメンバは二番目の入札額/4=$80/4=$20を得る
- 再配分額=$30+$40=$70, $10は余る
- 常に最適な割当を行い，お金を残さないことは不可能

**メンバ1: $100, メンバ2: $80, メンバ3: $60, メンバ4: $40 --- メンバ1が$80支払って車を使う**

251

## お金を残さないためには?

最適な割当を諦めれば可能

- くじ引きでランダムに一人を選ぶ
- 選ばれた人は車を使う権利は剥奪される
- 残りのメンバでVickrey/second-price
- 最大の評価値を申告したメンバが，二番目の評価値を支払って車を使う
- 支払額は，最初にくじ引きで選ばれた人が得る
- お金が残ることはないが，最大の評価値を持つ人がくじ引きで選ばれると最適な割当はできない

252

## 調達

- 買手は一人，売手は複数
- 安い価格を提示した売手が落札

問題点: 一円入札

- 以降の調達で有利になるように，採算を度外視した入札を行う
- 関連する複数の調達 (コピー機本体，消耗品，メインテナンス等) を組合せ入札で実行することにより改善可能

253

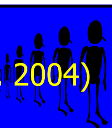
## インターネットオークション

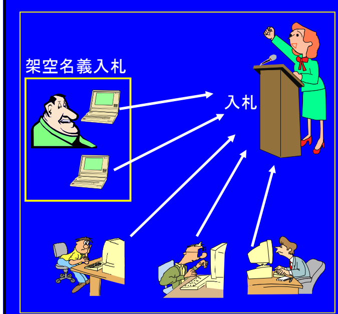
- 現在，多数のオークションサイトが存在．
- 利点
  - 誰でも世界中のオークションに参加できる．
  - エージェントが代行してくれる．

- 問題点
  - ネットワークの匿名性を利用した新しいタイプの不正行為の可能性 (架空名義入札)

254

## 架空名義入札 (Yokoo, et al. 2004)

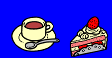





- 一人の人が，複数の人になりすまして，複数の名義で入札をすること
- ネットワーク環境では検出することは事実上不可能

255

## 架空名義入札の効果がある (誘因両立性が成立しない) 例



入札者は二人

| | coffee | cake | both |
|---|---|---|---|
| Bidder1 | $6 | $5 | $11 |
| Bidder2 | $0 | $0 | $8 |

| | coffee | cake | both |
|---|---|---|---|
| Bidder1 | $6 | $0 | $6 |
| Bidder2 | $0 | $0 | $8 |
| Bidder3 | $0 | $5 | $5 |

正直に申告した場合:

- 入札者1が両方の財を得る.
- 支払額: $8 − $0 ＝ $8

入札者1が入札者3 という名義を使って入札を分割した場合:

- 入札者1 が両方の財を得る.
- 支払額: $3 + $2 = $5

256

# 主な研究成果


- GVAが架空名義入札に対して頑健でないことを発見
- 架空名義入札が可能な場合，誘因両立性，パレート効率性を同時に満たすメカニズムは存在しないことを証明 More Detail
- 架空名義入札が可能な場合でも顕示原理が成立することを証明（よってパレート効率性を満たすメカニズムは存在しない）
- 誘因両立性を満たし，準最適なオークションメカニズムを考案 More Detail

257

# 不存在定理

- 架空名義入札が可能な場合，GVAだけでなく，どのようなオークション方式をもってしても，全ての場合において，誘因両立性とパレート効率性を同時に満たすものはない．

258

# 証明の方針

- どのようなメカニズムをもってしても，誘因両立性，パレート効率性を同時に満たすことが不可能な具体的な状況を示せばよい．
- 誘因両立性，パレート効率性を用いて支払額の上限を求めて，矛盾を導く．

Return

259

# 証明（ステップ1）

二種類の財（A と B），入札は（A のみ，B のみ，両方）

- bidder1: (a, 0, a)
- bidder2: (0, 0, a+b)
- bidder3: (0, a, a)
- a > b
- パレート効率性より bidder1 が A を，bidder3 が Bを得る．
- 誘因両立性より，それぞれの支払額は b +ε（入札額を下げようとする誘因を与えないため）．

260

# 証明（ステップ2）

二人の入札者

- bidder1: (a, a, 2a)
- bidder2: (0, 0, a+b)
- パレート効率性より，bidder1が両方の財を得る．
- 誘因両立性より，支払額は 2 (b +ε).
  - bidder1 に架空名義を使おうとする誘因を与えないため

261

# 証明（ステップ3）

- bidder1: (c, c, 2c)
- bidder2: (0, 0, a+b)
- b +ε < c, 2c < a + b
- パレート効率性よりbidder2が両方の財を得る．
- bidder1が真の評価値よりover-bidして (a, a, 2a)を入札するとステップ2と同じ．
- bidder1は両方の財を得て，支払額は 2 (b +ε) < 2c

誘因両立性が満足されない

Return

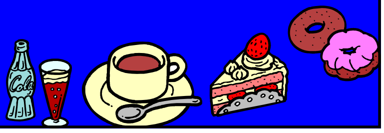
262

## 架空名義入札に頑健なメカニズム (トリビアルな方法)

メカニズム: Vickreyオークションを用いて常にすべての財をセットで売る.

- 財が代替的な場合には無駄

*状況に応じて財を分割して売るメカニズムを考える必要がある.*



263

## 架空名義入札に頑健なメカニズム

基本的なアイデア: 価格ベースメカニズム

- 各参加者i, 各財の組合せBに対して, 価格を決める
  - この価格はiの申告とは無関係に決める(他の参加者の申告には依存)
- 参加者iに, 上記の価格の元で, 効用を最大化するB*を割り当てる --- 同じ財を欲しがる参加者が存在しないように, 適切に価格を設定する必要がある

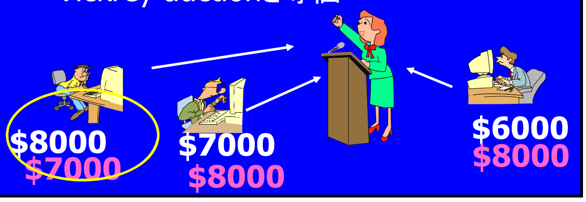
性質:

- 価格ベースメカニズムは誘因両立的
- 逆に, 任意の誘因両立的なメカニズムは価格ベースメカニズムとして記述できる

264

## 価格ベースメカニズムの例

- 単一財のオークション:
- 参加者xの価格: x以外の入札者の最大の入札額
- Vickrey auctionと等価




265

## 価格ベースの架空名義入札に頑健なメカニズムの性質

- 任意の財の組合せ B1,B2に関して, (B1∪B2)の価格≦ B1の価格 + B2の価格が成立すれば, 架空名義を使う意味がない

266

## 架空名義入札に頑健なメカニズムの例

参加者iの 財の組合せ Bの価格: 任意の B′ の他者の評価値の最大値, ただし B′∩B が空でなく, B′ が極小 (不要な財を含まない)

| | coffee | cake | both |
|---|---|---|---|
| Bidder 1 | $6 $8 | $0 $8 | $6 $8 |
| Bidder 2 | $0 $6 | $0 $5 | $8 $6 |
| Bidder 3 | $0 $8 | $5 $8 | $5 $8 |

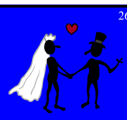
B1∪B2 の価格
= max(B1の価格, B2の価格)
≦ B1の価格 + B2の価格

267

## 両方向マッチング

- 学生／児童 ⇔研究室／学校, 労働者⇔企業, 研修医⇔病院等の望ましい組合せを求める問題
- Deferred Acceptance (DA) メカニズム (Gale & Shapley 1964) がよく知られている
- 一対一の場合は安定結婚問題と呼ばれる

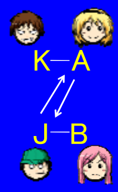
# 安定結婚問題



- 男性，女性がそれぞれ3人ずついる
- 各男性は3人の女性に対して，各女性は3人の男性に対して，好みの順番が決まっている
- 好みの順番は，当然，人によって異なる（たまたま同じかも知れない）
- 簡単のため，同点はないものとする
- 6人から，不安定なペアが存在しないように，ペアを3組作りたい



# 不安定なペアとは？




- 女性：Alice, Becky, Carol
- 男性：John, Ken, Lee
- Aliceにとって，J > K > L
- Johnにとって，A > B > C
- もしAliceのペアがKenで，JohnのペアがBeckyだと，AliceとJohnは，今のペアと別れてペアとなった方が二人ともより幸福
- このようなペアを不安定なペアと呼ぶ
- 不安定なペアを含まない組合せを安定マッチングと呼ぶ



# 安定マッチングを見つける: Deferred Acceptance (DA) mechanism (Gale & Shapley, 1962)

- 男性／女性は，独身，婚約中のどちらか
- 初期状態では全員独身
- 独身の女性が残っていれば，以下の処理を繰り返し適用
  - 独身の女性は，これまでにまだプロポーズをしていない男性のうちで，最も好みの男性にプロポーズする（男性が婚約中でも気にしない）．一人の男性には一回しかプロポーズできない
  - 男性は，現在婚約中の女性よりも，より良い相手がプロポーズしてきたら，現在の婚約を解消して，最も好みの女性と改めて婚約する
- 独身の女性がいなくなれば，現在婚約中のペアでマッチングを決定



# DAメカニズムの実行例

- 女性は第一希望の男性にプロポーズ
- AliceとBeckyが競合
- Beckyがリジェクト

| | John | Ken | Lee |
|---|---|---|---|
| first | Carol | Carol | Becky |
| second | Alice | Alice | Carol |
| third | ~~Becky~~ | Becky | Alice |

| | Alice | Becky | Carol |
|---|---|---|---|
| first | John | ~~John~~ | Lee |
| second | Ken | Lee | John |
| third | Lee | Ken | Ken |



# DAメカニズムの実行例

- Beckyは第二希望のLeeにプロポーズ
- BeckyとCarolが競合
- Carolがリジェクト

| | John | Ken | Lee |
|---|---|---|---|
| first | Carol | Carol | Becky |
| second | Alice | Alice | ~~Carol~~ |
| third | ~~Becky~~ | Becky | Alice |

| | Alice | Becky | Carol |
|---|---|---|---|
| first | John | ~~John~~ | ~~Lee~~ |
| second | Ken | Lee | John |
| third | Lee | Ken | Ken |



# DAメカニズムの実行例

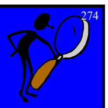
- Carolは第二希望のJohnにプロポーズ
- CarolとAliceが競合，Aliceがリジェクト
- Aliceが第二希望のKenにプロポーズ

| | John | Ken | Lee |
|---|---|---|---|
| first | Carol | Carol | Becky |
| second | ~~Alice~~ | Alice | ~~Carol~~ |
| third | ~~Becky~~ | Becky | Alice |

| | Alice | Becky | Carol |
|---|---|---|---|
| first | ~~John~~ | ~~John~~ | ~~Lee~~ |
| second | Ken | Lee | John |
| third | Lee | Ken | Ken |

274

## DAメカニズムの性質（I）



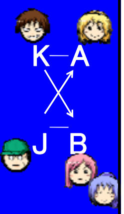
- 女性にとって正直が最良の策／誘因両立性
  - 駄目元でトライしても後悔することはない
- 任意の時点で以下が成立
  - 各女性にとって，婚約中の相手よりも望ましい男性には，すでに断られている
  - 各男性にとって，今まで断った女性よりも，より望ましい女性と婚約している

  よって，終了時のマッチングは安定

275

## DAメカニズムの性質（II）

- 男性にとっては？ 現在自分にプロポーズしている女性の中で，最も好みの女性を選ぶのが本当に最適？
  - 最適とは限らない！
  - 三人，JはA>B>Cで，B, Cがプロポーズしている．AはKにプロポーズしている．KはB>A，AはK>J，BはJ>K
  - JがBを選ぶとJ,Bのペアが決定，もしBを断ると，BはKにプロポーズして，Aが断られて自分に来る！
- 常に安定なマッチングを生成し，男性／女性の両方で正直が最良の策となるアルゴリズムは存在しない




276

## 理論を適用する際の課題（I）

- 男女100名ずつのお見合いパーティーでDAメカニズムを用いてペアを構成
- 理論的帰結は，安定なマッチングが得られ，女性にとっては正直が最良の策
- 上記が本当に成立するか？ 現実には成立するかどうか怪しい前提が隠れていないか？

277

## 理論を適用する際の課題（II）

- 前提：男性は，女性に関して，あらかじめ与えられた選好順序を持ち，その順序に従ってプロポーズしてきた女性から，婚約する女性を選ぶ
- 自分が男性だとして，以下の状況を考える
  - 最初の状態では，Aliceの方をBeckyより，ごくわずかに好んでいた
  - Beckyのみが最初からプロポーズしてくれていた
  - 一方，Aliceは他の98人の男性から断られ，99人目に自分にプロポーズしてきた
  - ここでAliceを選べるか？

278

## 理論を適用する際の課題（III）

- 「自分を一番好きだと思ってくれる人が好き」という感情は自然
- しかし，「一番好き」と言ってくれる人を優先するようにメカニズムを構築すると，嘘でも「一番好き」と言ってしまうインセンティブを与えてしまう
- 真実を知りたければ，自分にとって都合の悪い真実でも受け入れる覚悟が必要

279

## 多対一マッチング

- 学生を研究室に割り当てる場合，同じ研究室に複数の学生が割り当て可能
- DAメカニズムの簡単な拡張で対応可能
- 学生が女性に，研究室が男性に対応
- 研究室は，希望する学生を定員まで（仮）アクセプトする

280

## Basic Model

- 学生の集合 S={$s_1$, …, $s_n$}
- 学校の集合 C={$c_1$, …, $c_m$}
- $\succ_s$: 学生sの C∪{s}に対する厳密な選好順序 --- sは自宅で学習を意味する
- $\succ_c$ : 学校cのSに対する厳密な優先順位
- $q_c$ : 学校 c の上限値(定員)
- μ: あるマッチング, μ(c) はcに割り当てられてる学生の集合を, μ(s) はsの割り当てられている学校を示す
- μ はすべてのcに関して, |μ(c)|≦ $q_c$ が成立する場合に実現可能

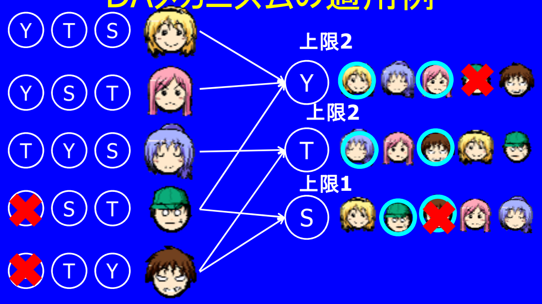
281

## DAメカニズム(Deferred Acceptance, Gale and Shapley, 1962)

- 第kステップ:
  - 各学生は, まだリジェクトされていない学校中で, 最も希望順位が高い学校にアプライする
  - 各学校は, アプライしている学生を定員枠の範囲で, 自身の選好順に上位から仮マッチとする(この時点ではあくまで仮マッチであることに注意)
  - 定員枠を超えた学生はリジェクトする
- リジェクトされた学生は, それぞれ次の希望順位の学校にアプライする. 各学校は, 前のステップで仮マッチとなった学生と, 新しくアプライしてきた学生を一切区別せず, 選好順に上から仮マッチとする. 以下, すべての学生が仮マッチとなった時点で, 仮マッチを正式配属結果とする

282

## DAメカニズムの適用例




283

## DAメカニズムの性質

- 誘因両立性:学生にとって, 正直に自分の希望を提出するのが最適!
  - 希望順位をいじっても一切得をすることがない
  - 「本当はこの学校に行きたいが, 自分の成績ではちょっと難しいかも…」という場合でも, 希望して後で不利になることはない
  - 学校側の戦略的操作不可能性は不成立
- 妥当な不満を持つ学生が存在しない
  - 自分が行きたくて配属されなかった学校には, その学校の選好順で自分よりも上位の学生のみが配属されている
- 空きシートを要求する学生が存在しない
  - 自分が行きたくて配属されなかった学校は定員上限まで埋まっている
- 妥当な不満を持つ学生がいない+空きシートを要求する学生がいない=マッチングが安定

284

## DAメカニズムの性質(続き)

- 妥当な不満を持つ学生が存在しないことと, 空きシートを要求する学生がいないことが, 安定結婚問題で不安定なペアがいないことに対応
- 上記の性質を見たすマッチング中で, 学生にとって最適なマッチングが得られる(上記の性質を満たすマッチング中で, すべての学生がDAメカニズムの結果が, 同点も含めて最も良いと思っている)