

ゲーム理論 (第10回 両方向マッチング)

九州大学大学院システム情報科学研究院
情報学部門
横尾 真

E-mail: yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp
<http://agent.inf.kyushu-u.ac.jp/~yokoo/>

268

両方向マッチング

- 学生/児童 ⇔ 研究室/学校, 労働者 ⇔ 企業, 研修医 ⇔ 病院等の望ましい組合せを求める問題
- Deferred Acceptance (DA) メカニズム (Gale & Shapley 1964) がよく知られている
- 一対一の場合は安定結婚問題と呼ばれる



269

安定結婚問題

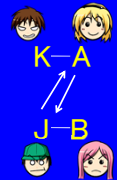


- 男性, 女性がそれぞれ3人ずついる
- 各男性は3人の女性に対して, 各女性は3人の男性に対して, 好みの順番が決まっている
- 好みの順番は, 当然, 人によって異なる (たまたま同じかも知れない)
- 簡単のため, 同点はないものとする
- 6人から, 不安定なペアが存在しないように, ペアを3組作りたい

270

不安定なペアとは?

- 女性: Alice, Becky, Carol
- 男性: John, Ken, Lee
- Aliceにとって, $J > K > L$
- Johnにとって, $A > B > C$
- もしAliceのペアがKenで, JohnのペアがBeckyだと, AliceとJohnは, 今のペアと別れてペアとなった方が二人ともより幸福
- このようなペアを不安定なペアと呼ぶ
- 不安定なペアを含まない組合せを安定マッチングと呼ぶ



271

安定マッチングを見つける: Deferred Acceptance (DA) mechanism (Gale & Shapley, 1962)

- 男性/女性は, 独身, 婚約中のどちらか
- 初期状態では全員独身
- 独身の女性が残っていれば, 以下の処理を繰り返し適用
 - 独身の女性は, これまでにまだプロポーズをしていない男性のうちで, 最も好みの男性にプロポーズする (男性が婚約中でも気にしない). 一人の男性には一回しかプロポーズできない
 - 男性は, 現在婚約中の女性よりも, より良い相手がプロポーズしてきたら, 現在の婚約を解消して, 最も好みの女性と改めて婚約する
- 独身の女性がいなくなれば, 現在婚約中のペアでマッチングを決定

272

DAメカニズムの実行例

- 女性は第一希望の男性にプロポーズ
- AliceとBeckyが競合
- Beckyがリジェクト

	John	Ken	Lee
first	Carol	Carol	Becky
second	Alice	Alice	Carol
third	Becky	Becky	Alice

	Alice	Becky	Carol
first	John	Becky	Lee
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken

273

274

DAメカニズムの実行例

- Beckyは第二希望のLeeにプロポーズ
- BeckyとCarolが競合
- Carolがリジェクト

	John	Ken	Lee
first	Carol	Carol	Becky
second	Alice	Alice	Carol
third	Becky	Becky	Alice

	Alice	Becky	Carol
first	John	Carol	Carol
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken

275

DAメカニズムの実行例

- Carolは第二希望のJohnにプロポーズ
- CarolとAliceが競合, Aliceがリジェクト
- Aliceが第二希望のKenにプロポーズ

	John	Ken	Lee
first	Carol	Carol	Becky
second	Alice	Alice	Carol
third	Becky	Becky	Alice

	Alice	Becky	Carol
first	John	John	John
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken

276

DAメカニズムの性質 (I)

- 女性にとって正直が最良の策 / 誘因両立性
 - 駄目目でトライしても後悔することはない
- 任意の時点で以下が成立
 - 各女性にとって、婚約中の相手よりも望ましい男性には、すでに断られている
 - 各男性にとって、今まで断った女性よりも、より望ましい女性と婚約している

よって、終了時のマッチングは安定

277

DAメカニズムの性質 (II)

- 男性にとっては? 現在自分にプロポーズしている女性の中で、最も好みの女性を選ぶのが本当に最適?
 - 最適とは限らない!
 - 三人, JはA>B>Cで, B, Cがプロポーズしている. AはKにプロポーズしている. KはB>A, AはK>J, BはJ>K
 - JがBを選ぶとJ,Bのペアが決定, もしBを断ると, BはKにプロポーズして, Aが断られて自分に来る!
- 常に安定なマッチングを生成し, 男性/女性の両方で正直が最良の策となるアルゴリズムは存在しない

278

理論を適用する際の課題 (I)

- 男女100名ずつのお見合いパーティーでDAメカニズムを用いてペアを構成
- 理論的帰結は, 安定なマッチングが得られ, 女性にとっては正直が最良の策
- 上記が本当に成立するか? 現実には成立するかどうかが怪しい前提が隠れていないか?

279

理論を適用する際の課題 (II)

- 前提: 男性は, 女性に関して, あらかじめ与えられた選好順序を持ち, その順序に従ってプロポーズしてきた女性から, 婚約する女性を選ぶ
- 自分が男性だとして, 以下の状況を考える
 - 最初の状態では, Aliceの方をBeckyより, ごくわずかに好んでいた
 - Beckyのみが最初からプロポーズしてくれていた
 - 一方, Aliceは他の98人の男性から断られ, 99人目に自分にプロポーズしてきた
 - ここでAliceを選ぶか?

理論を適用する際の課題 (III)

- 「自分を一番好きだと思ってくれる人が好き」という感情は自然
- しかし、「一番好き」と言ってくれる人を優先するようにメカニズムを構築すると、嘘でも「一番好き」と言ってしまうインセンティブを与えてしまう
- 真実を知りたければ、自分にとって都合の悪い真実でも受け入れる覚悟が必要

多対一マッチング

- 学生を研究室に割り当てる場合、同じ研究室に複数の学生が割り当て可能
- DAメカニズムの簡単な拡張で対応可能
- 学生が女性に、研究室が男性に対応
- 研究室は、希望する学生を定員まで(仮)アクセプトする

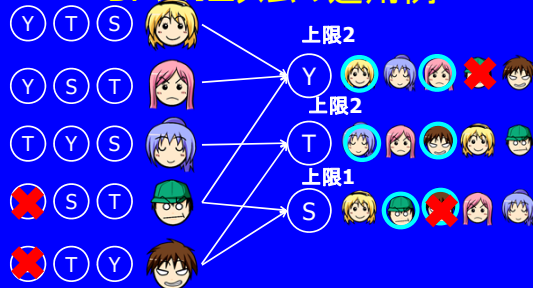
Basic Model

- 学生の集合 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$
- 学校の集合 $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
- \succ_s : 学生 s の $C \cup \{s\}$ に対する厳密な選好順序
--- s は自宅で学習を意味する
- \succ_c : 学校 c の S に対する厳密な優先順位
- q_c : 学校 c の上限値(定員)
- μ : あるマッチング, $\mu(c)$ は c に割り当てられている学生の集合を, $\mu(s)$ は s の割り当てられている学校を示す
- μ はすべての c に関して, $|\mu(c)| \leq q_c$ が成立する場合に実現可能

DAメカニズム(Deferred Acceptance, Gale and Shapley, 1962)

- 第 k ステップ:
 - 各学生は、まだリジェクトされていない学校中で、最も希望順位が高い学校にアプライする
 - 各学校は、アプライしている学生を定員枠の範囲で、自身の選好順に上位から仮マッチとする(この時点ではあくまで仮マッチであることを注意)
 - 定員枠を超えた学生はリジェクトする
- リジェクトされた学生は、それぞれ次の希望順位の学校にアプライする。各学校は、前のステップで仮マッチとなった学生と、新しくアプライしてきた学生を一切区別せず、選好順に上から仮マッチとする。以下、すべての学生が仮マッチとなった時点で、仮マッチを正式配属結果とする

DAメカニズムの適用例



DAメカニズムの性質

- 誘因両立性: 学生にとって、正直に自分の希望を提出するのが最適!
- 希望順位をいじっても一切得をすることがない
- 「本当はこの学校に行きたいが、自分の成績ではちょっと難しいかも...」という場合でも、希望して後で不利になることはない
- 学校側の戦略的操作不可能性は不成立
- 妥当な不満を持つ学生が存在しない
 - 自分が行きたくて配属されなかった学校には、その学校の選好順で自分よりも上位の学生のみが配属されている
- 空きシートを要求する学生が存在しない
 - 自分が行きたくて配属されなかった学校は定員上限まで埋まっている
- 妥当な不満を持つ学生がいらない + 空きシートを要求する学生がいらない = マッチングが安定

DAメカニズムの性質（続き）

- 妥当な不満を持つ学生が存在しないこと、空きシートを要求する学生がいないことが、安定結婚問題で不安定なペアがいないことに対応
- 上記の性質を見たすマッチング中で、学生にとって最適なマッチングが得られる（上記の性質を満たすマッチング中で、すべての学生がDAメカニズムの結果が、同点も含めて最も良いと思っている）

制約の必要性 (I)

- 現実の問題では、学生の配置に関して様々な追加的な制約条件が課せられることが通例
 - 地域上限: 研修医が大都市圏の病院に集中することを避けたい
 - 個別下限: 卒業研究配属において、配属される学生がゼロとなる研究室があると困る
 - アファーマティブアクション: 受け入れる学生の多様性を確保したい

制約の必要性 (II)

- 各学校毎に、厳密に守る必要がある個別の上限が与えられるというモデルは本当に妥当か?
 - 実際には、もう少し柔軟性があるのでは?
 - 本当に必要なら、教員を異動させる等で調整可能
 - 問題を扱いやすくするための近似でしかない?
 - 制約によって、このような柔軟性が表現可能

マッチング研究を始めた経緯 (I)

- ゲーム理論／マーケットデザインの一分野として、DAメカニズム等の一応の知識はあったものの、自分で研究するとは思っていなかった
- Gale & Shapleyの論文は1962年（横尾が生まれた年!）
- 今頃になって、何か大事な研究テーマが残っているという気がしなかった

マッチング研究を始めた経緯 (II)

- 九州大学電気情報工学科での卒業研究配属（2011年度）を担当
- 従来方式は第一希望優先方式（いわゆるポストン方式）
 - 学生側は自身の希望する研究室を第1希望から第n希望まで申告
 1. 全学生の第1希望において定員を満たすまで成績順に配属
 2. 配属されていない学生と定員の残る研究室で次の希望順位について同様に繰り返す

従来方式の問題点

- 学生同士の読みあい
 - 自分より成績の良い学生の希望順位に応じて、自分の希望順位を変更
- 読みを間違えると、望ましくない結果になる
- 例: 学生1の希望はA研究室、しかし、自分の成績だと第一希望で通る自信がもてず、B研究室を第一希望にした。しかし、蓋を開けてみると難関のA研究室は多くの学生が敬遠し、自分より成績が低い学生2が配属された
 - 学生1にとってもA研究室にとっても望ましくない（不安定なペア）

マッチング研究を始めた経緯 (III)

- せっかくなのでDAで実施したいと教授会で提案して承認された
- 従来は定員は教授3, 准教授2で固定, しかし, 留年等が多くて学生が足りず, 教授2, 准教授1を最低保証として, 学生の希望が多ければ追加することに変更
- この変更にともない, 従来方式だと学生の読み合いが複雑化して絶望的

マッチング研究を始めた経緯 (IV)

- 当初は, 単にDAを使えば良いと思っていた
- しかし, 各教員の最小配属人数を保証する必要あり(教授2, 准教授1)
- これぐらいは既存研究で当然やられているだろうと思ってプロフェッショナルに相談(スタンフォード小島さん)
- ところが, この問題は難しく解けない(厳密には, 安定なマッチングが存在しないことがある)と言われて愕然とする(もう教授会で, DAでできると言ってしまった...)

The Melancholy of Prof. Y (Part I)



マッチング研究を始めた経緯 (V)

- 電気情報工学科での配属は共通の成績ベース(マスターリスト), 研究室個別の優先順位は用いない
- この場合, 最低配属人数(下限制約)を満たす, 学生にとって正直が最良の策となる方法が, なんとか作れた
 - 2011年度より現在に至るまで, 九州大学電気情報工学科の卒研配属に開発したメカニズムが用いられている

The Melancholy of Prof. Y (Part II)



マッチング研究を始めた経緯 (VI)

- もう少し工夫すると, 研究室の個別の優先順位も導入可能(マスターリストでタイプブレーク)
- さらに工夫すると, マスターリストを用いないメカニズムも実現可能(弱い安定性を満たす)
- 実は, マッチングの結果に何らかの制約がある問題に関しては色々な課題が残っている
- ビギナーズラックで良い課題に当たった!
- 安定性が金科玉条になってしまうとチャレンジできなかったかも...

モデル (地域上限制約, Kamada & Kojima)

- 学生の集合 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$
- 学校の集合 $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
- 地域の集合 $R = \{r_1, r_2, \dots\}$, 地域 r は学校の部分集合で互いに素
- 各学校の個別上限 q_c , 各地域の上限 q_r が与えられる
- Motivation: 日本の研修医マッチングに使いたい。東京等の大都市圏の研修医の数を抑えることにより、地方／過疎地に一定数の研修医が配属されるようにする
- 現状はArtificial Cap DA, すなわち、地域上限を満たすように、個別の上限を人工的に小さくしているが、柔軟性に欠ける

空きシートの要求 (地域上限が存在する場合)

- 学生 s は, $\mu(s)$ よりも c を選好し, $|\mu(c)| < q_c$
かつ c が属する地域 r に関して $\sum_{c \in r} |\mu(c)| = |\mu(r)| < q_r$ である時, c の空きシートを要求するという
- 学生 s は, $\mu(s)$ よりも c を選好し, $|\mu(c)| < q_c$
かつ c と $\mu(s)$ が同じ地域 r に属し, $|\mu(r)| = q_r$ である時, c の空きシートを地域的に要求するという

地域上限の影響

- 任意のマッチングで, 妥当な不満を持つ学生, および (地域的にも含めて) 空きシートを要求する学生が常に存在する可能性がある

	\succ_{c_1}	\succ_{c_2}		\succ_{s_1}	\succ_{s_2}
	s_2	s_1		c_1	c_2
	s_1	s_2		c_2	c_1
q_c	1	1			

• 地域上限 1

Flexible DAメカニズム (Kamada & Kojima)

- DAの各ステップ内で以下を実行
- 地域内の学校間に, 選択の順序 ($c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots$) が与えられる
- この順序に従って, 個別の上限および地域の上限に違反しない限り, 各学校は, applyしている学生から, 最も自分の優先順位で上位の学生を一人仮マッチにできる。そうでなければapplyしている学生をreject。上記の処理を, 地域内の学校にapplyしている学生がすべて仮マッチ, もしくはrejectとなるまで繰り返す

学生 **学校** **地域上限は4**

		1位	2位	3位	4位	5位
A	$c_1 > c_3 > c_2$					
B						
C	$c_2 > c_1 > c_3$					
D						
E						

Flexible DAの性質

- 学生にとって誘因両立的
- 妥当な不満を持つ学生は存在しない
- Flexible DAは, 空きシートを要求する学生は存在しないが, 空きシートを地域的に要求する学生が生じる可能性がある
- ACDAよりも柔軟に割り当て人数を調整可能 (人気の高い学校により多くの学生が割り当てられる)

Model (個別下限)

- 各学校 c に関して, 個別の下限 p_c が与えられる
- 学生 / 学校共に, unacceptableはなし
- 個別の下限の合計 $\sum_{c \in C} p_c$ は学生の総数 n 以下
- μ はすべての c に関して, $p_c \leq |\mu(c)| \leq q_c$ が成立する場合に実現可能
- 学生 s は, $c = \mu(s)$ よりも c' を選好し, $|\mu(c')| < q_{c'}$
かつ $|\mu(c)| > p_c$ である時, c' の空きシートを要求するという

下限制約の影響

- 下限制約が存在する場合、任意のマッチングで空きシートを要求する学生、もしくは妥当な不満を持つ学生が常に生じる可能性がある

	γ_{c_1}	γ_{c_2}	γ_{c_3}	γ_{s_1}	γ_{s_2}
p_c	s_2	s_2	s_1	c_2	c_3
q_c	s_1	s_1	s_2	c_3	c_2
	1	0	0	c_1	c_1
	1	1	1		

下限制約

- 様々な現実の問題で下限制約を満たすことは重要 (過疎地の病院に一定数の研修医が配属されること、各研究室に最低一名の学生が配属されること等を保証)
- Ueda, Fragiadakis, Iwasaki, Troyan, & Yokoo (2012) で、世界で初めてDAメカニズムをベースに下限制約を満足するメカニズムを提案
 - Extended-seat DA: 学生にとって誘因両立的、妥当な不満を持つ学生が存在しない
 - Multi-stage DA: 学生にとって誘因両立的、空きシートを要求する学生は存在しない
 - 地域下限制約が存在する場合にも対応可能

Extended-Seat DA

- 学校を通常枠 (定員は下限) と拡張枠 (定員は上限-下限) に分ける
- 通常枠はDAと同じ方法、拡張枠全体が一つの地域に属していると考え、Flexible DAを適用
- 拡張枠の地域上限を、下限が満たされるように設定 (この例では2)



パレート効率性

- DAの結果は女性にとってパレート効率的?
- 不安定なペアの存在 / 男性の嗜好を無視すれば、女性全員がより幸せになる方法が存在

	John	Ken	Lee
first	Carol	Carol	Becky
second	Alice	Alice	Carol
third	Becky	Becky	Alice

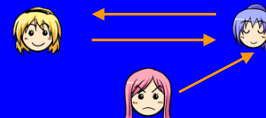
	Alice	Becky	Carol
first	John	John	Lee
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken

Top Trading Cycleメカニズム (Shapley and Scarf 1974)

- まず、男性を各女性にランダムに割り当てる (初期保有)
- 各女性は、最も好みの男性を保有する女性を指す (自分自身を指してもよい)
- 少なくとも一つの指指しのサイクルが存在するので、そのサイクルに従って、サイクルに含まれる女性に、好みの男性を割り当てる。これらの女性はマーケットから退出する。
- 残りの女性間で上記の手続きを、すべての女性がマーケットから退出するまで繰り返す。

例 (TTC)

	Alice	Becky	Carol
first	John	John	Lee
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken



TTCの性質

- 誘因両立性:
 - 自分に至る指差しのパスが存在すれば、そのパスに含まれる女性が保有する男性を得ることが可能。
 - そのようなパスは、自分がマーケットから退出するまで存在し続ける＝後でも入手可能
 - よって、今の第一希望を諦めて、これらの男性を手に入ようとする必要はない。
- パレート効率性:
 - 最初にできたサイクルでは、すべての女性は第一希望の男性を得ている。
 - 二回目のサイクルで、第二希望を得た女性を第一希望にするには、最初のサイクルの女性の誰かを犠牲にしないといけない。

TTCの両方向マッチングへの適用方法

メカニズム:

- 各学生は、最も好む学校を指差す。
- 各学校は、最も好む学生を指差す。
- 少なくとも一つサイクルが存在。
- サイクルに含まれる学生は、指差している学校の席を得てマーケットから退出する。各学校は、残りの席がなくなればマーケットから退出する。
- 残りの学生／学校間で上記の手続きを繰り返し適用する。

TTCの性質: Two-sided

- 学生にとって誘因両立的。
- 学生にとってパレート効率的。
- 結果は不安定。一般に安定性とパレート効率性は両立不可能。

試験の内容(予定)

- 全部で5問程度
- 問1: あるゲームのナッシュ均衡(混合戦略)を求める
- サッカーのペナルティキック等、バリエーションあり

試験の内容(予定)

問2: ゲーム木探索

- ある(十分小規模の)ゲームが、先手必勝か後手必勝かをゲーム木を作って確認する

試験の内容(予定)

問3: 単一財オークションで収入の期待値を求める

- 評価値はある範囲の一様分布
- 第二価格秘密入札での支配戦略均衡での、買手の効用の期待値、売手の収入の期待値を求める、もしくは第一価格でのバイジャンナッシュ均衡での収入の期待値を求める等

試験の内容(予定)

問4: 一般化Vickrey入札 (GVA)

– 組合せオークションで、ある与えられた入札に関して、勝者、およびその支払額を求める

試験の内容(予定)

応用問題は色々

- GVAの応用?
- キーワード広告?
- 再配分?
- マッチング?