

# 1 最小全域木

## 問 1-1

Kruscal のアルゴリズムの動作を図 1 に示す．求める最小全域木は図 1 (e) の通りである．

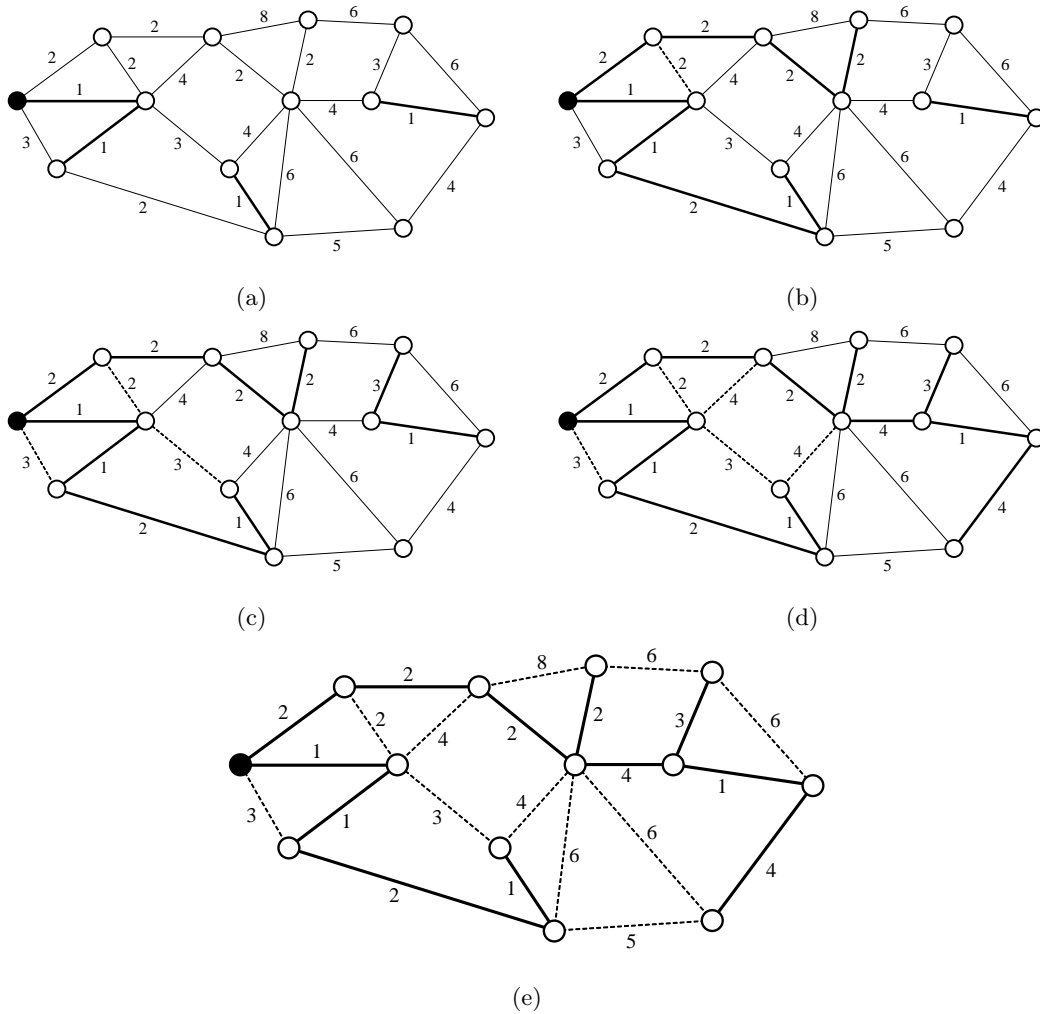


図 1: 問 1-1 における Kruskal のアルゴリズムの動作

## 問 1-2

Prim のアルゴリズムの動作を図 2 に示す．求める最小全域木は図 2 (g) の通りである．

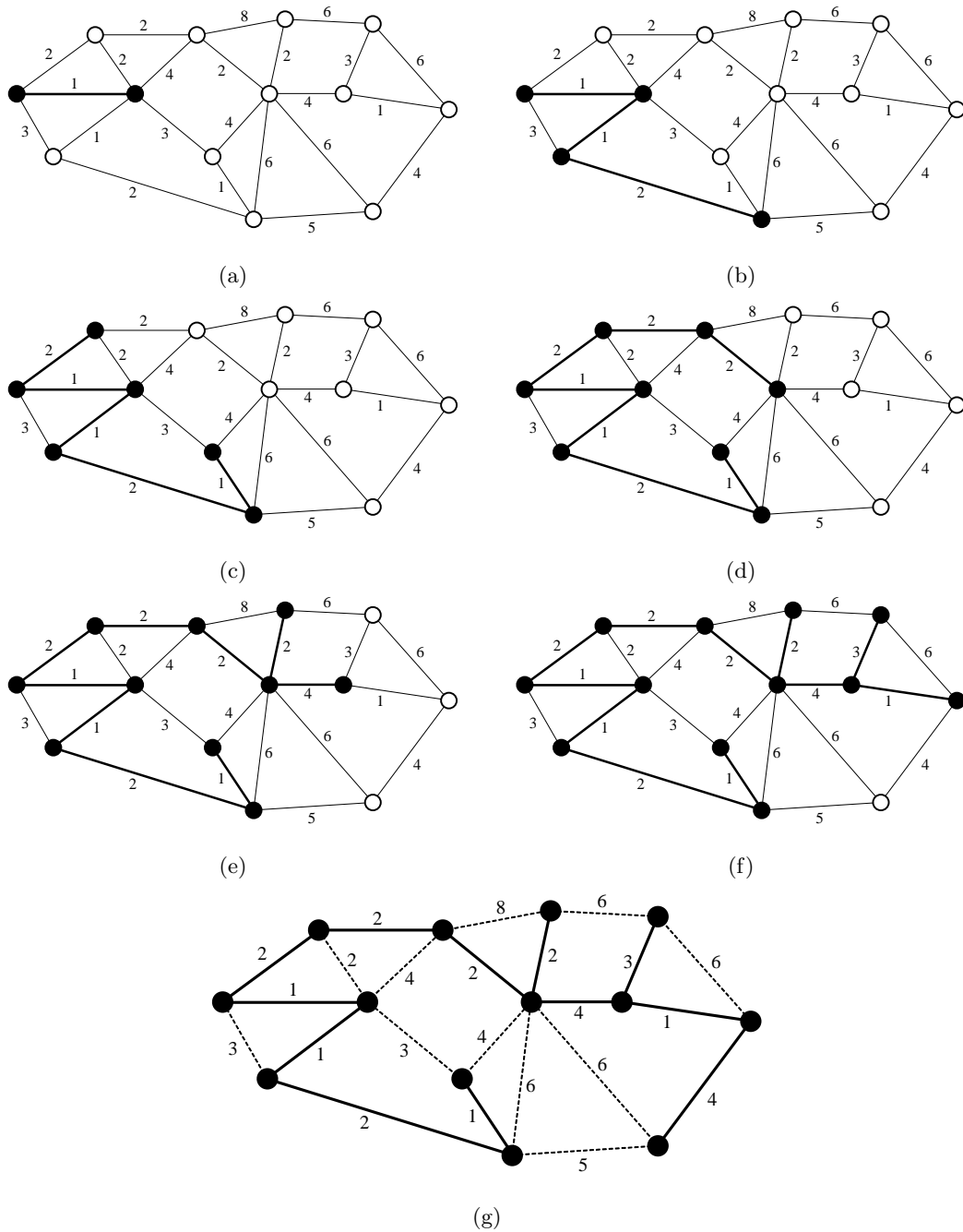


図 2: 問 1-2 における Prim のアルゴリズムの動作

## 2 トポロジカルソート

### 問 2-1

#### 性質 1

元の命題の対偶である, “有向グラフ  $G = (V, E)$  に対し, すべての頂点に対し, その頂点に入る辺が存在するならば,  $G$  には閉路が存在する”を示す.  $G$  のすべての頂点に対し, その頂点に入る辺が存在するなら

ば,  $G$  の閉路は以下の操作により発見することが可能である.

ステップ 1 任意に頂点を一つ選び  $v_1$  とし, ステップ 2 に進む.

ステップ  $k$   $(u, v_{k-1}) \in E$  を満たす頂点  $u$  に  $v_1, \dots, v_{k-1}$  のいずれかが含まれていれば, 操作を終了する. いずれも含まれていなければ,  $(u, v_{k-1}) \in E$  を満たす頂点  $u$  から任意に頂点を一つ選び  $v_k$  とし, ステップ  $k+1$  に進む.

$G$  のすべての頂点に対し, その頂点に入る辺が存在するため, 各ステップで頂点を一つ選ぶことが可能である. また, 頂点数は有限であるため, 操作は有限回のステップで終了する. 以上の操作を行い, ステップ  $k'$  で辺  $(v_i, v_{k'-1})$  が存在したため操作を終了したとする. このとき,  $\langle v_i, v_{k'-1}, v_{k'-2}, \dots, v_{i+1}, v_i \rangle$  が発見された閉路である. ゆえに元の命題の対偶が示されたので, 元の命題である, “有向グラフ  $G = (V, E)$  に対し,  $G$  に閉路が存在しないならば, その頂点に入る辺が存在しない頂点が少なくとも一つ存在する” が示された.

## 性質 2

頂点  $u$  から頂点  $v$  への道が存在するならば, トポロジカルソートにおいて,  $u$  が  $v$  よりも先に現れる. 一方, 頂点  $u$  から頂点  $v$  への道と頂点  $v$  から頂点  $u$  への道がどちらも存在しないならば, トポロジカルソートにおいて頂点  $u, v$  の順序は問われない. ゆえに, その頂点に入る辺が存在しない頂点のうち一つを  $v_0$  とすると, いかなる頂点からも  $v_0$  への道が存在しないため, あるトポロジカルソートにおいて  $v_0$  より先に現れる頂点が存在しないことが言える. ゆえに  $v_0$  を先頭に置くトポロジカルソートが存在する.

## 問 2-2

以下を繰り返す.

- グラフから, その頂点に入る辺が存在しない頂点を一つ選び, その頂点とその頂点から出る辺すべてをグラフから取り除く.

グラフから頂点がすべて取り除かれたならば, 頂点を取り除いた順序がトポロジカルソートとなる.

## 3 強連結成分

### 問 3

最初の深さ優先探索の結果を図 3 に示す. 各頂点に付けられた数字は, 深さ優先探索における各頂点の開始時刻/終了時刻を表す. 2 回目の深さ優先探索の結果と求める強連結成分は, 図 4 の通りである.

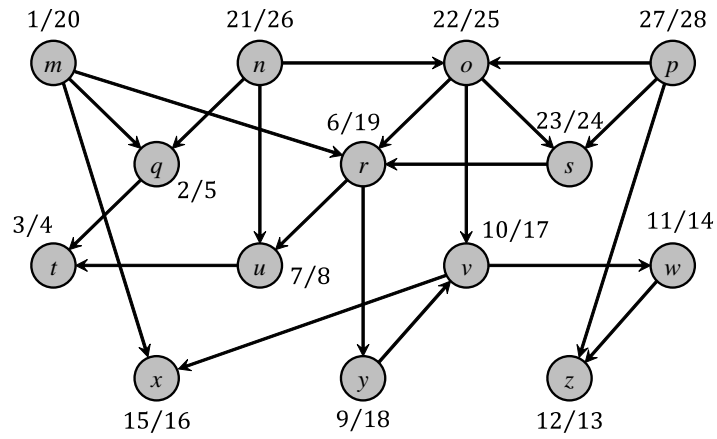


図 3: 1 回目の深さ優先探索の結果

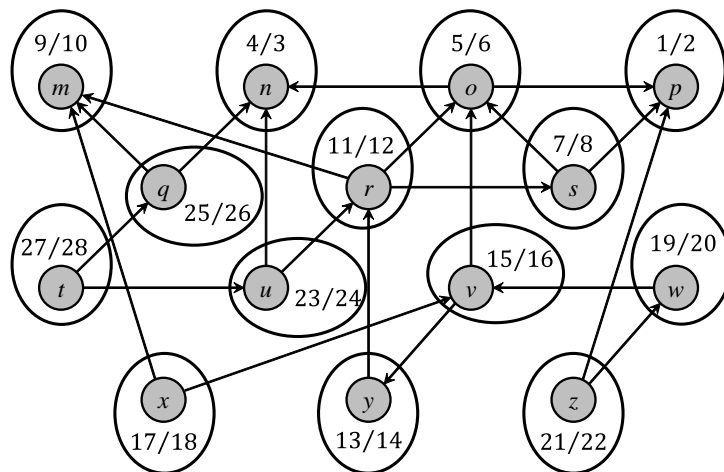


図 4: 2 回目の深さ優先探索の結果・求める強連結成分