2017 年 データ構造とアルゴリズム II 前半まとめテスト 模範解答

1　動的計画法 I

問 1-1

$c[i][j]$ を，X のうち最初から i 文字までと，Y のうち最初から j 文字までの最長共通部分列 (LCS) の長さとする．ただし，$i=0$ または $j=0$ のとき，$c[i][j]=0$ と定める．$c[i][j]$ は図 1 の通りに表される．ゆえに最長共通部分列の長さは $c[6][5]=\mathbf{5}$ である．

	j	0	1	2	3	4	5
i		y_j	A	B	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↖ 1	← 1	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↑ 1	↖ 2	← 2	↖ 2	← 2
3	B	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
4	A	0	↖ 1	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
5	B	0	↑ 1	↖ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4
6	A	0	↖ 1	↑ 2	↖ 3	↑ 4	↖ 5

図 1: 問 1 における $c[i,j]$

問 1-2

問 1-1 より，X と Y の最長共通部分列は $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\}$ である．

2　動的計画法 II

問 2-1

id が i である商品の重さを w_i, 価値を v_i とすると，$C[i][w]$ は以下の式で表される．

$$C[i][w]=\begin{cases}0 & (i=0 \text{ または } w=0 \text{ のとき}) \\ C[i-1][w] & (w<w_i\text{のとき}) \\ \max\{C[i-1][w],\ C[i-1][w-w_i]+v_i\} & (i>0 \text{ かつ } w\geq w_i\text{のとき})\end{cases}$$

問 2-2

$C[i][w]$ において最適な (商品の価値の和を最大化する) 商品の入れ方がなされていると仮定すると，漸化式において，$C[i-1][w]$ と $C[i-1][w-w_i]$ を，部分問題として解くことになる．ここで，部分問題 $C[i-1][w]$ において，合計の価値をより大きくする商品の入れ方が存在すると仮定すると，この入れ方を用いて，id が i までである商品を，より価値の合計が大きくなるように入れることが可能である．このことは $C[i][w]$ において最適な商品の入れ方がなされていることに矛盾する．部分問題 $C[i-1][w-w_i]$ に対しても同様である．ゆえに $C[i][w]$ における最適な商品の入れ方に，$C[i-1][w]$ または $C[i-1][w-w_i]$ における最適な商品の入れ方が含まれるため，部分問題最適性が成立する．

問 2-3

$C[i][w]$ は表 1 の通りである．ゆえに重さの上限が 8 のナップザックに入れられる商品の価値の和の最大値は $C[5][8] = \mathbf{19}$ である．

表 1: 問 2 における $C[i][w]$

$w\backslash i$	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2
2	4	5	5	5	5
3	4	5	7	8	8
4	4	9	9	10	10
5	4	9	11	13	13
6	4	9	11	15	15
7	4	9	11	17	17
8	4	9	11	19	19

3 貪欲法

問 3-1

締切時刻までに終了させるタスクを決定する際には，**罰金の額が大きい順**にタスクを選べばよい．

問 3-2

罰金の総額を最小化するスケジュールは $\langle \mathbf{2, 4, 1, 3, 7, 5, 6} \rangle$ である．(締切時刻までに終了するように処理するタスクは $1, 2, 3, 4, 7$ の 5 つ)

4　ならし解析

問 4-1

以下の式の通り．

$$\phi(T) = \begin{cases} 2 \cdot T.num - T.size & (\alpha \geq \frac{1}{2}) \\ T.size/2 - T.num & (\alpha < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

問 4-2

Table-Insert と Table-Delete から構成される操作列のうち，i 番目の操作の実コストを c_i, ならしコストを $\hat{c}_i$ とし，i 番目の操作が Table-Delete である場合のならしコストを考える．また，i 番目の操作が終了した後の表 T のサイズを $T.size_i$, 含まれる要素数を $T.num_i$ とする．

1. 操作前に $\alpha \geq 1/2$ であり，要素を削除した後も $\alpha \geq 1/2$ である場合

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \phi(T_i) - \phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (2 \cdot T.num_i - T.size_i) - (2 \cdot T.num_{i-1} - T.size_{i-1}) \\ &= 1 + 2 \cdot (T.num_{i-1} - 1) - T.size_{i-1} - 2 \cdot T.num_{i-1} + T.size_{i-1} \\ &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

2. 操作前に $\alpha \geq 1/2$ であり，要素を削除した後は $\alpha < 1/2$ となる場合，操作前は $\alpha = 1/2$ であることから，

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \phi(T_i) - \phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (\frac{1}{2} \cdot T.size_i - T.num_i) - (2 \cdot T.num_{i-1} - T.size_{i-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot T.size_{i-1} - (T.num_{i-1} - 1) - 2 \cdot T.num_{i-1} + T.size_{i-1} \\ &= 2 - 3 \cdot T.num_{i-1} + \frac{3}{2} \cdot T.size_{i-1} \\ &= 2 - 3 \cdot (\alpha \cdot T.size_{i-1}) + \frac{3}{2} \cdot T.size_{i-1} \\ &= 2 - 3 \cdot (\alpha - \frac{1}{2}) \cdot T.size_{i-1} \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

3. 操作前に $1/4 \leq \alpha < 1/2$ であり，要素を削除した後も $\alpha \geq 1/4$ である (表の縮小が起こらない) 場合

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \phi(T_i) - \phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (\frac{1}{2} \cdot T.size_i - T.num_i) - (\frac{1}{2} \cdot T.size_{i-1} - T.num_{i-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot T.size_{i-1} - (T.num_{i-1} - 1) - \frac{1}{2} \cdot T.size_{i-1} + T.num_{i-1} \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

4. 操作前に $1/4 \le \alpha < 1/2$ であり，要素を削除した後は $\alpha < 1/4$ となる (表の縮小が起こる) 場合，操作前は $\alpha = 1/4$ であることから，

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \phi(T_i) - \phi(T_{i-1}) \\
&= (1 + T.num_i) + (\frac{1}{2} \cdot T.size_i - T.num_i) - (\frac{1}{2} \cdot T.size_{i-1} - T.num_{i-1}) \\
&= T.num_{i-1} + \frac{1}{4} \cdot T.size_{i-1} - (T.num_{i-1} - 1) - \frac{1}{2} \cdot T.size_{i-1} + T.num_{i-1}) \\
&= 1 + T.num_{i-1} - \frac{1}{4} \cdot T.size_{i-1} \\
&= 1 + (\alpha \cdot T.size_{i-1}) - \frac{1}{4} \cdot T.size_{i-1} \\
&= 1 + (\alpha - \frac{1}{4}) \cdot T.size_{i-1} \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$