問題は4まで．裏面あり．

1　関数のオーダ

問1

以下の関数を増加のオーダが小さい順に並べよ．

$$n^{10},\ \lg(n!),\ \lg n,\ 2^n,\ 2^{(2^n)},\ \sqrt{n},\ n!$$

注意： lg は2を底とする対数である (e ではない).

2　ソーティングアルゴリズムの計算量

問2: 以下から正しいものを選べ (複数選択可).

1. マージソートの実行時間は $O(n^2)$
2. マージソートの実行時間は $O(n \log n)$
3. マージソートの実行時間は $\Omega(n)$
4. マージソートの実行時間は $\Omega(n \log n)$
5. マージソートの実行時間は $\Theta(n \log n)$
6. マージソートの最悪の実行時間は $\Theta(n^2)$
7. マージソートの最良の実行時間は $\Theta(n \log n)$
8. (仮に) 2,4 が両方とも真なら 5 は真
9. (仮に) 1,3 が両方とも真なら 5 は真
10. (仮に) 1 が真なら 6 は真
11. (仮に) 2 が真なら 1 は真

3　漸化式

以下の漸化式を考える．

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ T(n-1) + \lg n & n > 1 \end{cases}$$

問3: 帰納法を用いて，$T(n) = O(n \lg n)$ であることを示せ．

- O の定義に従って，忠実に証明すること．
  $T(n) = O(n \lg n)$ であるとは，ある定数 c が存在し，十分大きなすべての n に対して，$T(n) \leq c \cdot n \lg n$ が成立することを言う．
- 境界条件は省略して良い ($n = 1$ だと 成立しない)．
- 定数 c に関する条件を明確に，かつタイトな (可能な限り小さい) 値で示すこと．

4 確率

問題設定

- 結婚式の余興で実施される，以下の占いを考える．
- 長さが 50cm の 8 本のロープが束ねてある．
- まず，新郎が束ねてあるロープの片側の 8 つの端を，二つずつ結ぶ (合計 4 回結ぶ).
- 次に，新婦が反対側の 8 つの端を，二つずつ結ぶ (合計 4 回結ぶ)．この際に，反対側でどのロープ同士が結ばれているかは見えないものとする．
- 最終的に，8 本のロープが一つの大きな輪になる場合，二つの輪に分かれる場合，三つの輪に分かれる場合，四つの輪に分かれる場合の，4 通りの可能性がある．
- 一つ，もしくは二つの輪になれば，新郎新婦の相性は最高．三つなら平均的，四つならあまり良くないとする．

問 4-1: ロープが 4 本しかない場合は，一つの輪ができるか，二つの輪ができるかのいずれかである．それぞれの確率を求めよ．ヒント：新郎の選択は無視して良い．新婦が選択を行う際には，長さが 1m の二本のロープが中央で折りたたまれており，四つの端が見えていると考えて良い．

問 4-2: ロープが 6 本しかない場合は，一つの輪ができるか，二つの輪ができるか，三つの輪ができるかのいずれかである．それぞれの確率を求めよ．ヒント：前問の結果をうまく使う．

問 4-3: ロープが 8 本の場合に，相性が最高と判断される確率 (一つもしくは二つの輪ができる確率) を求めよ．ヒント：前問の結果をうまく使う．