

問題は3まで.

1 アルゴリズム設計

- 二本の磁気テープ A, B があり, それぞれ 64 個のデータが記録されている (順番はバラバラで同じ値はないものとする).
- さらに, 作業用の磁気テープ C, D がある. 共に 64 個のデータが記録可能.
- 磁気テープの読み取り専用の機械が二台, 書き込み専用の機械が二台ある.
- 読み取り専用の機械は, テープを機械に入れて, read という命令を実行すると, テープの最初に記録されているデータを返す. 続けて read を実行すると, 以下, 二番目のデータ, 三番目データのように, 逐次的に次のデータを返す. 同様に, 書き込み専用の機械は, テープを機械に入れて, write(d1) という命令を実行すると, テープの最初に d1 を記録する. 続けて write(d2), write(d3) 等を実行すると, 磁気テープの二番目に d2, 三番目に d3 のように, 逐次的にデータを記録する.
- テープの最後のデータを読み取る, もしくはテープの最後に記録を行うと, テープは機械から排出される.
- 磁気テープは繰り返して書き換え可能である.
- 一つのデータのサイズは大きく, 主記憶上には同時に 2 つのデータしか読み込めない.

問 1-1: 最終的に, A, B に記録されたデータ中で, 最小の要素, 小さい方から二番目の要素, ..., 小さい方から 64 番目の要素を, この順で C に記録し, 小さい方から 65 番目の要素, 小さい方から 66 番目の要素, ..., 最大 (小さい方から 128 番目) の要素を, この順で D に記録したい. この目的を実現する手続きを簡潔に述べよ (ヒント: マージソートと類似のアイデアを用いる).

問 1-2: 上記の手続きが終了するまでに, テープ A が読み取り専用および書き込み専用の機械にセットされる回数の合計を求めよ.

2 川渡りパズル

- f_1, f_2, f_3 の三名の女性と m_1, m_2, m_3 の三名の男性が, 南北に流れる川を, 西側から東側に渡ろうとしている.
- m_1 と f_1 , m_2 と f_2 , m_3 と f_3 は夫婦である.
- 一度に二名しか乗れないボートが一つだけある. このボートを b で表す.
- 誰かが漕がないとボートは川を渡れない.

- 宗教的理由により、既婚男性は、妻と一緒にない時に、他人の妻と一緒にいることは許されない。よって、他人の妻と一緒にボートに乗ることは当然ダメであり、また、自分の妻と一緒になければ、他人の妻と川の同じ側に居ることもできない。
- 考慮すべき状態／ノードの数を減らすため、一般性を失うことなしに、川を渡るのは必ず f_1, f_2, f_3 の順であること、すなわち、 f_1 が川の西側に残っているのに、 f_2 が川の東側にいることはなく、また、 f_1 および f_2 が川の西側に残っているのに、 f_3 が川の東側にいることはないことを仮定する。同様に、川を渡るのは必ず m_1, m_2, m_3 の順であることを仮定する。
- 状態は、川の西側にいる人とボートの有無で記述する。
初期状態は $\{f_1, m_1, f_2, m_2, f_3, m_3, b\}$ であり、目標状態は $\{\}$ 、すなわち空集合である。
- 可能な状態は以下の 16 個である (初期状態から到達不可能な状態は省略):
 $\{f_1, m_1, f_2, m_2, f_3, m_3, b\}, \{f_1, f_2, m_2, f_3, m_3, b\}, \{f_1, f_2, m_2, f_3, m_3\}, \{f_1, f_2, f_3, m_3, b\},$
 $\{f_1, f_2, f_3, m_3\}, \{f_1, f_2, f_3\}, \{f_2, m_2, f_3, m_3, b\}, \{f_2, m_2, f_3, m_3\}, \{f_3, m_3, b\}, \{f_3, m_3\},$
 $\{m_1, m_2, m_3, b\}, \{m_2, m_3, b\}, \{m_2, m_3\}, \{m_3, b\}, \{m_3\}, \{\}.$

問 2: この問題をグラフで表現し、宗教的制約を満足しながら全員が川を渡る最短経路の長さを示せ。

3 部屋の割当

- n 人の学生 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ に対して、 n 個の学生寮の部屋 $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ を割り当てることを考える。
- 各学生は、部屋に対する好み／優先順位を持っており、同点はないものとする。
- 学生 s_i が、部屋 r_j に割り当てられていることを、 (s_i, r_j) のペアで記述する。このようなペアの集合 P で割当を記述するものとする。2つの異なる割当 P, P' に関して、すべての学生が、 P で割り当てられている部屋の方を、 P' で割り当てられている部屋よりも好む、もしくは両方で同じ部屋に割り当てられている場合、 P は P' をパレート支配するという。ある割当 P に関して、 P をパレート支配する他の割当が存在しない場合、 P はパレート効率的であるという。
- 以下のような割当方法を考える。
 1. 全学生に、それぞれ一つの部屋を仮に割り当てる。学生 s_i に仮に割り当てられている部屋を r_i をする。
 2. 各学生は、自分が最も好む部屋に仮に割り当てられている学生を指差す (自分に仮に割り当てられている部屋を最も好む場合は自分自身を指す)。
 3. 指差し関係のサイクルを考える。例えば、 s_1 が s_2 を、 s_2 が s_3 を、 s_3 が s_1 を指している場合、これらの学生はサイクルを構成している。このようなサイクルは、少なくとも一つは存在することが保証される。サイクル中の学生間で部屋の交換を行う。前述の例では、 s_1 が r_2 を、 s_2 が r_3 を、 s_3

が r_1 を得る. 交換を行った学生に対する割当は最終決定とする. 自分自身を指した場合は, 自身の仮割当てを最終決定とする. 残りの学生間で, 2-3 の処理を繰り返す (残りの学生は, 最終決定となった学生を指差すことはできないことに注意).

問 3-1: 上記の方法をとった場合, 各学生にとって正直が最良の策になるか否か (正直に最も好みの部屋に仮割当てとなっている学生を指差すことが良いかどうか) について議論せよ.

問 3-2: 上記の方法をとった場合, 得られる割当がパレート効率的であるか否かについて議論せよ.

問 3-3: パレート効率性と, 他者の割当を羨まないという非羨望性 (envy-freeness) との関係について議論せよ.