

データ構造とアルゴリズム II

九州大学大学院システム情報科学研究院
情報学部門 主幹教授
横尾 真

E-mail: yokoo@inf.kyushu-u.ac.jp
<http://agent.inf.kyushu-u.ac.jp/~yokoo/>

1

自己紹介

- 1986年東京大学大学院工学系研究科 電気工学専門課程 修士課程修了
- 同年 日本電信電話株式会社 (NTT) 入社
- NTT情報通信処理研究所 (神奈川県横須賀市), NTTコミュニケーション科学基礎研究所 (京都府相楽郡) 等に勤務
- 人工知能, マルチエージェントシステムに関する研究に従事
- 1995年 博士 (工学), 東京大学工学系研究科 電子情報工学専攻
- 2004年4月より九州大学システム情報科学研究院 教授, 2012年より主幹教授

2

成績に関して

- 小テスト, 期末試験の成績で判断
- 出席は取るが, 試験の成績が良ければ, 出席率は問わない (小テストは受験するように!)
- 不合格ぎりぎりぐらいの場合は出席率も考慮するかも知れない

3

GPA制度(2007年度より導入)

- A: 90-100点: 4: 特に優れている
- B: 80-89点: 3: 優れている
- C: 70-79点: 2: 普通である
- D: 60-69点: 1: 一応の学修成果があり, 単位は認める
- F: 59点以下: 0: 不合格

4

予定 (I)

4/11: 第1回: イントロダクション: マッチング
4/18: 第2回: 動的計画法1
4/25: 第3回: 動的計画法2
5/2: 金曜日の講義日
5/9: 小テスト
5/16: 第4回: 動的計画法3
5/23: 第5回: 貪欲法
5/30: 第6回: 計算量解析
6/6: 前半まとめテスト

5

予定 (II)

6/13: 第7回: 幅優先, 深さ優先探索
6/20: 第8回: トポロジカルソート
6/27: 第9回: 最小全域木
7/4: 第10回: 単一起点最短路
7/11: 第11回: 全点对最短経路問題
7/18: 第12回: 最大フロー
7/25: 定期試験

6

講義について

- パワーポイントのスライドを用いる
- 教科書 (近代科学社, コルメン, ライザーソン, リベスト, シュタイン著, アルゴリズムイントロダクション 第二巻, 第三版) に準じて講義を進める
 - 旧版を持っているなら買い換えなくてもよい
- スライドはホームページで後日公開する
 - google等で“横尾 九州大学”
- 詳細なノートを取る必要はない (講義の内容に集中!)

7

自習方法

- 講義中で紹介したアルゴリズムに関して動作を良く理解し, 使えるようになること
 - 自分で計算機に実装して動かす
 - プログラムする言語は好きなもの/慣れているものを選べば良い
 - 実装自体は簡単 (インタラクションなし)
 - フリーの処理系は多い (GCC/G++, JAVA)

8

アルゴリズム設計 (I)

- 単なるプログラミングとは異なる
- アルゴリズムは言語や処理系に依存しない一般的なもの
- 良いアルゴリズムは広範囲に, 非常に長い期間に渡って用いられる
- アルゴリズム設計は高度な知的作業
 - パズル的な楽しさがある
 - 解析には, それなりの数学的知識が必要

9

アルゴリズム設計 (II)

古典的な定義: 与えられた入力に対して, 望ましい出力を出す手続き

- 静的な一回限りの問題解決
 - すべてはアルゴリズム設計者がコントロール可能
- 設定の拡張:
- 問題の入力が逐次的にしか分からない (online algorithm)
 - アルゴリズム設計者以外のプレイヤーが存在し, これらのプレイヤーの行動が結果に影響を与える (ゲーム理論, メカニズム設計)
 - 以下, メカニズム設計の例として両方向マッチングを紹介

10

両方向マッチング

- 学生/児童 ⇔ 研究室/学校, 労働者 ⇔ 企業, 研修医 ⇔ 病院等の望ましい組合せを求める問題
- Deferred Acceptance (DA) メカニズム (Gale & Shapley 1964) がよく知られている
- 一対一の場合は安定結婚問題と呼ばれる



11

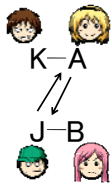
安定結婚問題



- 男性, 女性がそれぞれ3人ずついる
- 各男性は3人の女性に対して, 各女性は3人の男性に対して, 好みの順番が決まっている
- 好みの順番は, 当然, 人によって異なる (たまたま同じかも知れない)
- 簡単のため, 同点はないものとする
- 6人から, 不安定なペアが存在しないように, ペアを3組作りたい

12

不安定なペアとは?



- 女性: Alice, Becky, Carol
- 男性: John, Ken, Lee
- Aliceにとって, $J > K > L$
- Johnにとって, $A > B > C$
- もしAliceのペアがKenで, JohnのペアがBeckyだと, AliceとJohnは, 今のペアと別れてペアとなった方が二人ともより幸福
- このようなペアを不安定なペアと呼ぶ
- 不安定なペアを含まない組合せを安定マッチングと呼ぶ

13

安定マッチングを見つける: Deferred Acceptance (DA) mechanism (Gale & Shapley, 1962)

- 男性/女性は, 独身, 婚約中のどちらか
- 初期状態では全員独身
- 独身の女性が残っていれば, 以下の処理を繰り返し適用
 - 独身の女性は, これまでにまだプロポーズをしていない男性のうちで, 最も好みの男性にプロポーズする(男性が婚約中でも気にしない). 一人の男性には一回しかプロポーズできない
 - 男性は, 現在婚約中の女性よりも, より良い相手がプロポーズしてきたら, 現在の婚約を解消して, 最も好みの女性と改めて婚約する
- 独身の女性がいなくなれば, 現在婚約中のペアでマッチングを決定

14

DAメカニズムの実行例

- 女性は第一希望の男性にプロポーズ
- AliceとBeckyが競合
- Beckyがリジェクト

	John	Ken	Lee
first	Carol	Carol	Becky
second	Alice	Alice	Carol
third	Becky	Becky	Alice

	Alice	Becky	Carol
first	John	Lee	Lee
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken

15

DAメカニズムの実行例

- Beckyは第二希望のLeeにプロポーズ
- BeckyとCarolが競合
- Carolがリジェクト

	John	Ken	Lee
first	Carol	Carol	Becky
second	Alice	Alice	Carol
third	Becky	Becky	Alice

	Alice	Becky	Carol
first	John	Lee	Lee
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken

16

DAメカニズムの実行例

- Carolは第二希望のJohnにプロポーズ
- CarolとAliceが競合, Aliceがリジェクト
- Aliceが第二希望のKenにプロポーズ

	John	Ken	Lee
first	Carol	Carol	Becky
second	Alice	Alice	Carol
third	Becky	Becky	Alice

	Alice	Becky	Carol
first	John	Lee	Lee
second	Ken	Lee	John
third	Lee	Ken	Ken

17

DAメカニズムの性質



- 女性にとって正直が最良の策/誘因両立性
 - 駄目元でトライしても後悔することはない
 - 任意の時点で以下が成立
 - 各女性にとって, 婚約中の相手よりも望ましい男性には, すでに断られている
 - 各男性にとって, 今まで断った女性よりも, より望ましい女性と婚約している
- よって, 終了時のマッチングは安定

18

誘因両立性

- アルゴリズムの設計者が、問題を解くために必要な情報をあらかじめ持っておらず、他のプレイヤーから情報を集める必要がある場合、誘因両立性が成立することは重要
- 何らかの基準で、望ましい出力を得ようとしても、元になる情報が不正確ではどうにもならない
- 正しい情報を得るためには、それなりの工夫が必要

19

多対一マッチング

- 学生を研究室／学校に割り当てる場合、同じ研究室／学校に複数の学生が割り当て可能
- DAメカニズムの簡単な拡張で対応可能
- 学生が女性に、研究室／学校が男性に対応
- 研究室／学校は、希望する学生を定員まで(仮)アクセプトする

20

基本モデル

- 学生の集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$
- 学校の集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$
- 各学生 s は C に対して厳密な選好順序 \succ_s を持つ
- 各学校 c は S に対して厳密な選好順序 \succ_c を持つ
- q_c : 学校 c の上限制約 (定員)
- μ は、あるマッチングを示す。 $\mu(s)$ は s がマッチしている学校、 $\mu(c)$ は c にマッチしている学生の集合を示す
- μ は以下の制約を満たす場合に実現可能 (feasible) であるという: for each c , $|\mu(c)| \leq q_c$.

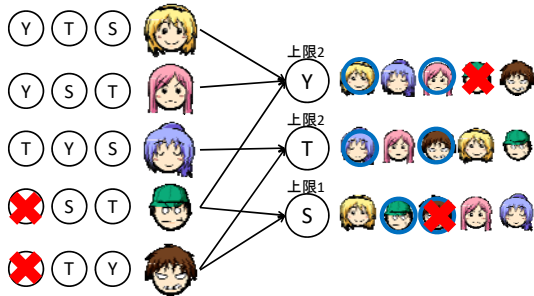
21

DAメカニズム (Deferred Acceptance)

- 第 k ステップ:
 - 各学生は、まだリジェクトされていない学校中で、最も希望順位が高い学校にアプライする
 - 各学校は、アプライしている学生を定員枠の範囲で、自身の選好順に上位から仮マッチとする(この時点ではあくまで仮マッチであることに注意)
 - 定員枠を超えた学生はリジェクトする
- リジェクトされた学生は、それぞれ次の希望順位の学校にアプライする。各学校は、前のステップで仮マッチとなった学生と、新しくアプライしてきた学生を一切区別せず、選好順に上から仮マッチとする。以下、すべての学生が仮マッチとなった時点で、仮マッチを正式配属結果とする

22

DAメカニズムの適用例



23

DAメカニズムの性質 (I)

- 誘因両立性: 学生にとって、正直に自分の希望を提出するのが最適!
 - 希望順位をいじっても一切得をすることがない
 - 「本当はこの学校に行きたいが、自分の成績ではちょっと難しいかも...」という場合でも、希望して後で不利になることはない
 - 学校側の誘因両立性は不成立
- 妥当な不満を持つ学生が存在しない = 公平性 (fairness)
 - 自分が行きたくて配属されなかった学校には、その学校の選好順で自分よりも上位の学生のみが配属されている
- 空きシートを要求する学生が存在しない = 非浪費性 (non-wastefulness)
 - 自分が行きたくて配属されなかった学校は定員上限まで埋まっている

24

DAメカニズムの性質 (II)

- 公平性と非浪費性が、安定結婚問題で不安定なペアがないことに対応
- 上記の性質を見たすマッチング中で、学生にとって最適なマッチングが得られる(上記の性質を満たすマッチング中で、すべての学生がDAメカニズムの結果が、同点も含めて最も良いと思っている)
- しかしながら、DAメカニズムは各学校の上限制約のみを仮定

25

制約の必要性 (I)

- 現実の問題では、学生の配置に関して様々な追加的な制約条件が課せられることが通例
 - 地域上限: 研修医が大都市圏の病院に集中することを避けたい
 - 個別下限: 卒業研究配属において、配属される学生がゼロとなる研究室があると困る
 - アフターマティブアクション: 受け入れる学生の多様性を確保したい

26

制約の必要性 (II)

- 各学校毎に、厳密に守る必要がある個別の上限が与えられるというモデルは本当に妥当か?
 - 実際には、もう少し柔軟性があるのでは?
 - 本当に必要なら、教員を異動させる等で調整可能
 - 問題を扱いやすくするための近似でしかない?
 - 制約によって、このような柔軟性が表現可能

27

マッチング研究を始めた経緯 (I)

- ゲーム理論/マーケットデザインの一分野として、DAメカニズム等の一応の知識はあったものの、自分で研究するとは思っていなかった
- Gale & Shapleyの論文は1962年(横尾が生まれた年!)
- 今頃になって、何か大事な研究テーマが残っているという気がしなかった

28

マッチング研究を始めた経緯 (II)

- 九州大学電気情報工学科での卒業研究配属(2011年度)を担当
- 従来方式は第一希望優先方式(いわゆるポストン方式)
 - 学生側は自身の希望する研究室を第1希望から第n希望まで申告
 1. 全学生の第1希望において定員を満たすまで成績順に配属
 2. 配属されていない学生と定員の残る研究室で次の希望順位について同様に繰り返す

29

従来方式の問題点

- 学生同士の読みあい
 - 自分より成績の良い学生の希望順位に応じて、自分の希望順位を変更
- 読みを間違えると、望ましくない結果になる
- 例: 学生1の希望はA研究室、しかし、自分の成績だと第一希望で通る自信がもてず、B研究室を第一希望にした。しかし、蓋を開けてみると難関のA研究室は多くの学生が敬遠し、自分より成績が低い学生2が配属された
 - 学生1にとってもA研究室にとっても望ましくない(不安定なペア)

30

マッチング研究を始めた経緯 (III)

- せっかくなのでDAで実施したいと教授会で提案して承認された
- 従来は定員は教授3, 准教授2で固定, しかし, 留年等が多くて学生が足りず, 教授2, 准教授1を最低保証として, 学生の希望が多ければ追加することに変更
- この変更にもない, 従来方式だと学生の読み合いが複雑化して絶望的

31

マッチング研究を始めた経緯 (IV)

- 当初は, 単にDAを使えば良いと思っていた
- しかし, 各教員の最小配属人数を保証する必要あり(教授2, 准教授1)
- これぐらいは既存研究で当然やられているだろうと思ってプロフェッショナルに相談(スタンフォード小島さん)
- ところが, この問題は難しく解けない(厳密には, 安定なマッチングが存在しないことがある)と言われて愕然とする(もう教授会で, DAできると言ってしまった...)

32

The Melancholy of Prof. Y (Part I)



33

マッチング研究を始めた経緯 (V)

- 電気情報工学科での配属は共通の成績ベース(マスターリスト), 研究室個別の優先順位は用いない
- この場合, 最低配属人数(下限制約)を満たす, 学生にとって正直が最良の策となる方法が, なんとか作れた
 - 2011年度より現在に至るまで, 九州大学電気情報工学科の卒研配属に開発したメカニズムが用いられている

34

The Melancholy of Prof. Y (Part II)



35

マッチング研究を始めた経緯 (VI)

- もう少し工夫すると, 研究室の個別の優先順位も導入可能(マスターリストでタイプブレーク)
- さらに工夫すると, マスターリストを用いないメカニズムも実現可能(弱い安定性を満たす)
- 実は, マッチングの結果に何らかの制約がある問題に関しては色々な課題が残っている
- ビギナーズラックで良い課題に当たった!
- 安定性が金科玉条になってしまうとチャレンジできなかったかも...

36

モデル (地域上限制約, Kamada & Kojima 2015)

- 学生の集合 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$
- 学校の集合 $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
- 地域の集合 $R = \{r_1, r_2, \dots\}$, 各地域 r は学校の部分集合. 各地域は互いに素
- 各学校 c は上限制約 q_c を持ち, 各地域 r は地域上限制約 q_r を持つ
- Motivation: 日本の研修医マッチングに使いたい. 東京等の大都市圏の研修医の数を抑えることにより, 地方や過疎地に一定数の研修医が配属されるようにする
- 公平性と非浪費性の両方を常に満たすことは不可能

37

Flexible DAメカニズム (Kamada & Kojima 2015)

- DAの各ステップ内で以下を実行
- 地域内の学校間に, 選択の順序 ($c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow \dots$) が与えられる
- この順序に従って, 個別の上限および地域の上限に違反しない限り, 各学校は, applyしている学生から, 最も自分の優先順位で上位の学生を一人仮マッチにできる. そうでなければapplyしている学生をreject. 上記の処理を, 地域内の学校にapplyしている学生がすべて仮マッチ, もしくはrejectとなるまで繰り返す

A

B

C

D

E

$c_1 > c_3 > c_2$

$c_2 > c_1 > c_3$

Regional Max: 4

	1	2	3	4	5
c_1					
c_2					
c_3					

38

Flexible DAの性質

- 誘因両立性を満足
- 公平性を満足
- 非浪費性は満足できない

39

Model (個別下限)

- 各学校 c に関して, 個別の下限 p_c が与えられる (この数以上の学生が配属されることを保証)
- 学生/学校共に, 受け入れ不可能な学校/学生は存在しないことを仮定
- 個別の下限の合計 $\sum_{c \in C} p_c$ は学生の総数 n 以下.
- μ はすべての c に関して, $p_c \leq |\mu(c)| \leq q_c$ が成立する場合に実現可能
- 学生 s は自分が割り当てられている学校 $c = \mu(s)$ よりも c' を好み, $|\mu(c')| < q_c$ かつ $|\mu(c)| > p_c$ が成立するとき, c' の空シートを要求するという
- 公平性と非浪費性を常に保証することは不可能

40

下限制約

- 様々な現実の問題で下限制約を満たすことは重要 (過疎地の病院に一定数の研修医が配属されること, 各研究室に最低一名の学生が配属されること等を保証)
- Fragiadakis, Iwasaki, Troyan, Ueda, & Yokoo (2016) で, 世界で初めてDAメカニズムをベースに下限制約を満足するメカニズムを提案
 - Extended-seat DA: 学生にとって誘因両立的, 公平性を満足
 - Adaptive DA: 学生にとって誘因両立的, 非浪費性を満足

41

Extended-Seat DA

- 学校を通常枠 (定員は下限) と拡張枠 (定員は上限-下限) に分ける
- 通常枠はDAと同じ方法, 拡張枠全体が一つの地域に属していると考え, Flexible DAを適用
- 拡張枠の地域上限を, 下限が満たされるように設定 (この例では2)

学生

A

B

C

D

E

$c_1 > c_3 > c_2$

$c_2 > c_3 > c_1$

学校 下限1 上限3

	通常枠	拡張枠(上限2)
c_1		
c_2		
c_3		

42





Adaptive DA メカニズム

- GPAのような、学生を評価する共通の基準 (Master List, MLと呼ぶ) が存在することを仮定
- $k = 1$ から以下のステージを繰り返す:
 - MLで上位 k 人の学生をDAを使って(仮に)割り当てる
 - 残りの学生数=まだ埋まっていない下限の数, となったら, 現在の割当てを固定し, 残りの学生に関して, 残りの下限数を用いてDAを適用.
 - そうでなければ, 現在の割当てをリセットして, $k + 1$ のステージを実行.

43

Adaptive DA メカニズム (実行例)

- 各学生の選好は全員で同じ:
- $$c_1 > c_2 > c_3 > c_4.$$
- 学校の優先順位は全学校で同じでMLの逆順

	Fixed
c_1 :	
c_2 :	
c_3 :	
c_4 :	

ML 

Adaptive DA メカニズムの性質 (I)

- 非浪費性を満足
 - もし学生 s が学校 c からリジェクトされたなら, c は満員であるか, s が割り当てられた学校が下限ギリギリであるかのどちらか.
- 公平性は満足できない. 仮に学生 s の学校 c における優先順位が高くて, MLでの順位が低ければ c に入れない可能性がある.

45

Adaptive DA メカニズムの性質 (II)

- 誘因両立性を満足
 - あまり自明ではない
 - 嘘をついて早めに学校 c の下限を埋めれば, 結果が固定され, 他のライバルが増えなくて有利?
- しかしながら, このような操作は無意味であることが証明できる. 学生 s が真実を述べた場合に, 現在のステージでより望ましい学校 c' に割り当てられたとする
 - 次に加えられた学生 s' (もしくは他の学生が玉突き的に) c に割り当てられる場合, 次のステージでマッチングが確定, s は c' に割り当てられる
 - 次に加えられた学生 s' (もしくは他の学生が玉突き的に) c' に割り当てられ, s が c' からリジェクトされる場合, s は c を選んでマッチングが確定

46

Take home message

- 両方向マッチングには多くの応用分野が存在: 研修医配属, 学校選択制, 生体臓器移植ネットワーク
- 研究の歴史は長い (Gale & Shapleyの論文が出版されたのは1962年) が, 制約付きのようにモデルを拡張すれば様々な研究課題が生じる
- ミクロ経済学と計算機科学の境界領域の研究として面白い!

47